Diskrétna matematika I. – Vianočná sada úloh

Príprava na skúšku alebo príklady pre tých, ktorých ešte neopustil entuziazmus

---

1. Napíšte negácie nasledujúcich výrokov:
(i) n je párne alebo m je násobkom 3,
(ii) každé $x \in A$ je prvkom $A \cap B$,
(iii) ak dnes neprší, potom nepadajú traktory.

2. Preložte význam nasledujúceho výroku do krátkej slovenskej vety (dá sa to na 5 slov) a tiež napíšte jeho negáciu v symbolickom jazyku. (V tomto príklade premenné m, n, a, b sú chápané ako kladné celé čísla, t.j. $\forall m$ znamená $\forall m \in \mathbb{N}^+$.)

$$(\forall m)(\exists n)(\forall a)(\forall b)[[n \geq m] \wedge [(a = 1) \vee (b = 1) \vee ((ab \neq n) \wedge (ab + 2 \neq n))]].$$

3. Daná je operácia $*$ na prirodzených číslach spĺňajúca:
(i) $1 * n = n - 1$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$,
(ii) $m * 1 = (m - 1) * 2$ pre všetky $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$,
(iii) $m * n = (m - 1) * (m * (n - 1))$ pre $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > 1$.
Nájdite hodnotu $5 * 5$.

4. *Symetrický rozdiel* $A \triangle B$ množín A a B je definovaný ako $(A - B) \cup (B - A)$. Pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt pre výroky $x \in A$, $x \in B$, $x \in C$ ukážte, že operácia $\triangle$ je asociatívna. Ďalej ukážte, že x patrí do $A \triangle (B \triangle C)$ práve vtedy, ak x patrí do nepárneho počtu z množín A, B, C. Použite toto pozorovanie na zostrojenie ďalšieho dôkazu, že $\triangle$ je asociatívna operácia.

5. Definujme binárnu operáciu $*$ na $\mathbb{Z}^2$ nasledujúcou formulou: $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + bc)$. Dokážte, že operácia $*$ je komutatívna a asociatívna. Nájdite predpis pre

$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) * \cdots * (a_k, b_k).$$

6. Nech f je zobrazenie z reálnych čísel do reálnych čísel. Hovoríme, že f je *striktne rastúca funkcia* ak pre $x < y$ je aj $f(x) < f(y)$. Ukážte, že ak je f striktne rastúca, potom je injektívna. Musí nutne byť aj surjektívna? Predpokladajme, že f je bijektívna, $f(0) = 0$ a $f(1) = 1$. Vyplýva z toho, že f je striktne rastúca? Ak je f spojitá?

7. Nech O je obdĺžnik, ktorý sa dá rozdeliť na menšie obdĺžniky, z ktorých každý ma aspoň jednu stranu celočíselnej dĺžky. Ukážte, že aj O má aspoň jednu stranu celočíselnej dĺžky.

8. Nech n je párne číslo a $\mathcal{A}$ systém podmnožín množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ s vlastnosťou, že pre každé $A, B \in \mathcal{A}$ je počet prvkov $A \cap B$ párny (toto platí aj pre dvojicu $A = B$). Koľko množín môže $\mathcal{A}$ obsahovať? Ako sa zmení odpoveď ak množiny v $\mathcal{A}$ majú párny počet prvkov, ale pre $A \neq B$ je veľkosť prieniku $A \cap B$ nepárna?

9. Dá sa uzavretý interval $\langle 0, 1 \rangle$ zapísať ako nekonečné spočítateľné zjednotenie disjunktných neprázdnych uzavretých intervalov?

10. Daných je n bodov v rovine, pričom neležia všetky na jednej priamke. Ukážte, že je možné nájsť priamku, na ktorej ležia práve dva z nich.

11. Nech $\langle a_i, b_i \rangle$ je uzavretý interval kladných reálnych čísel pre $i \in \mathbb{N}$. Predpokladajme, že $\sum_i (b_i - a_i) < \infty$. Vyplýva z toho, že existuje nejaké reálne číslo x také, že nx nepatrí do žiadneho intervalu $\langle a_i, b_i \rangle$ pre každé prirodzené n?

12. Majme nekonečný spočítateľný kruh docentov, z ktorých každý má na hlave kolbúk. Klobúky sú modré alebo červené a každý docent vidí kolbúky všetkých kolegov okrem toho svojho. V istom momente, musia docenti zakričať farbu svojho klobúka. Dajú sa docentom dať také inštrukcie, aby sa, bez ohľadu na distribúciu farieb klobúkov, pomýlilo iba konečne veľa docentov?