

Axiómy a vety výrokovej logiky, ktoré môžete použiť:

$$(A1) \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

$$(V1) \vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

$$(A2) \vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

$$(V2) \vdash \neg\neg A \Rightarrow A$$

$$(A3) \vdash (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

$$(V2') \vdash B \Rightarrow \neg\neg B$$

$$(V0) \vdash A \Rightarrow A$$

$$(V3) \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

1. Postupnosť $\{a_n\}$ je definovaná predpisom: $a_{n+1} = 3a_n + 1$ pre $n \geq 1$ a $a_1 = 5$. Ukážte, že $a_n = \frac{11 \cdot 3^{n-1} - 1}{2}$.

2. Ukážte, že pre členy Fibonacciho postupnosti $\{F_n\}$ (t.j. $F_1 = 1, F_2 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$) pre $n \geq 2$ platí:

$$F_n^2 = F_{n+1}F_{n-1} + (-1)^{n+1}.$$

3. Zistite či je formula $p \vee q$ tautologickým dôsledkom formuly $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow p$.

4. Ukážte, že $\neg(B \Rightarrow A) \vdash B$. Môžete použiť vyššie uvedené vety a axiómy, modus ponens a vetu o dedukcii.

5. Ukážte, že nasledujúca kvantifikovaná formula je tautológiou alebo nájdite protipríklad:

$$(\forall x)(\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)) \Rightarrow ((\exists x)\Phi(x) \Rightarrow (\forall x)\Psi(x)).$$