

Axiómy a vety výrokovej logiky, ktoré môžete použiť:

- |   |   |
|---|---|
| (A1) $\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$   | (V1) $\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$                      |
| (A2) $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ | (V2) $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$                                  |
| (A3) $\vdash (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$                                       | (V2') $\vdash B \Rightarrow \neg\neg B$                                 |
| (V0) $\vdash A \Rightarrow A$   | (V3) $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ |

- Ukážte, že pre  $n \geq 1$  platí

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{(2n-1)(2n)(2n+1)}{6}.$$

- Ukážte, že pre členy Fibonacciho postupnosti  $\{F_n\}$  (t.j.  $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2$  a  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ) platí:

$$F_{n+2}^2 - 2F_{n+1}^2 = F_{n+1}^2 - F_n^2 + 2(-1)^{n+1}.$$

- Zistite či je formula  $(q \Rightarrow p) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$  tautologickým dôsledkom formuly  $(q \Rightarrow r) \vee p$ .
- Ukážte, že  $\vdash (A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ . Môžete použiť vyššie uvedené vety a axiómy, modus ponens a vetu o dedukcii.
- Ukážte, že nasledujúca kvantifikovaná formula je tautológiou alebo nájdite protipríklad:

$$((\forall x)\Phi(x) \Rightarrow (\exists x)\Psi(x)) \Rightarrow ((\exists x)(\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x))).$$