2. Riešená písomka z diskrétnej matematiky I.

1. Dokážte, že pre ľubovoľné množiny A, B, C platí:
a) $A \cup B = A - B \Leftrightarrow B = \emptyset$,
b) $A - (C \cap B) = (A - C) \cup B \Leftrightarrow ((B \subseteq A) \wedge (A \cap C = \emptyset))$.

Riešenie: a) $\boxed{\Rightarrow}$ Túto implikáciu dokážeme sporom. Nech $A \cup B = A - B$ a nech $B \neq \emptyset$. Teda existuje $b \in B$. Potom zrejme $b \in A \cup B$, ale $b \notin A - B$. Čo je v spore s predpokladom, že $A \cup B = A - B$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Nech $B = \emptyset$. Potom $A \cup B = A \cup \emptyset = A$ a $A - B = A - \emptyset = A$.

b)$\boxed{\Rightarrow}$ Nech $A-(C \cap B) = (A-C) \cup B$. Určite $A \supseteq A-(C \cap B)$ a $B \subseteq (A-C) \cup B$. Teda $B \subseteq A$. Ďalej pokračujme sporom. Nech $\exists x \in A \cap C$. Potom $x \notin A-C$. Ľahko overíme, že $A-(C \cap B) = (A-C) \cup (A-B)$. Teda $x \in A - (C \cap B) \Leftrightarrow x \notin B$, ale zároveň $x \in (A - C) \cup B \Leftrightarrow x \in B$, čo je v spore s tým, že $A - (C \cap B) = (A - C) \cup B$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Nech $(B \subseteq A) \wedge (A \cap C = \emptyset)$. Potom $A - (C \cap B) = (A - C) \cup (A - B) = A \cup (A - B) = A$ a podobne $(A - C) \cup B = A \cup B = A$.

2. Koľko existuje relácií na štvorprvkovej množine, ktoré sú antisymetrické a majú vlastnosť dichotómie zároveň?

Riešenie: Uvažujme štvorprvkovú množinu $\{a, b, c, d\}$. Každá vyhovujúca relácia musí (kvôli vlastnosti dichotómie) obsahovať prvky $[a, a], [b, b], [c, c], [d, d]$. Ak je relácia antisymetrická a súčasne má vlastnosť dichotómie, tak z dvojíc $[x, y], [y, x]$ pre $x \neq y$ obsahuje práve jednu. (Nemôže obe, lebo z antisymetrie by sme dostali, že $x = y$).

	a	b	c	d
a	x	1		
b	1	x		
c			x	
d				x

Teda pre každú dvojicu prvkov $\{x, y\}$ (takých je 6) určíme, či relácii patrí prvok $[x, y]$, alebo $[y, x]$, resp. prvok z horného, alebo dolného trojuholníka tabuľky. Teda počet všetkých takýchto relácií vieme vyjadriť ako počet variácií šiestej triedy na dvojprvkovej množine, čo je 2^6.

3. Na množine $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ máme reláciu $\sim$ definovanú predpisom:

$$[x_1, y_1] \sim [x_2, y_2] \Leftrightarrow x_1 y_1 = x_2 y_2.$$

Ukážte, že relácia $\sim$ je reláciou ekvivalencie, zistite ako vyzerajú triedy ekvivalencie pre prvky $[1, 1]$ a $[0, 0]$, načrtnite obrázok zobrazujúci triedy rozkladu.

Riešenie: Aby bola relácia reláciou ekvivalencie, musí byť reflexívna, symetrická a tranzitívna. Overme postupne tieto vlastnosti:

Reflexívnosť: $\forall [x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} [x, y] \sim [x, y]$, lebo $xy = xy$.

Symetrickosť: Nech $[x_1, y_1] \sim [x_2, y_2]$, teda $x_1 y_1 = x_2 y_2$. Ekvivalentne $x_2 y_2 = x_1 y_1$, teda tiež $[x_2, y_2] \sim [x_1, y_1]$.

Tranzitívnosť: Nech $[x_1, y_1] \sim [x_2, y_2]$ a zároveň $[x_2, y_2] \sim [x_3, y_3]$. Teda $x_1 y_1 = x_2 y_2$ a $x_2 y_2 = x_3 y_3$. Z toho nutne $x_1 y_1 = x_3 y_3$ a teda $[x_1, y_1] \sim [x_3, y_3]$.

Ako vyzerajú triedy ekvivalencie pre prvok $[0, 0]$? To sú všetky dvojice z $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ktoré sú s prvkom $[0, 0]$ v relácii, t.j. súčin je 0.

$$\big[[0, 0]\big] = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : xy = 0\} = \{[0, y], [x, 0] : \forall x, y \in \mathbb{R}\},$$

čo je x-ová a y-ová os. Podobne pre prvok $[1, 1]$.

$$\big[[1, 1]\big] = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : xy = 1\} = \{[x, \frac{1}{x}] : \forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}\},$$

čo je graf funkcie $\frac{1}{x}$.

4. Zistite či existuje čiastočné usporiadanie päťprvkovej množiny, ktoré má 2 maximálne a jeden najväčší prvok. Ak áno, znázornite pomocou Hesseho diagramu, ak nie zdôvodnite.

Riešenie: Ukážme, že ak v čiastočne usporiadanej množine (nezáleží na počte prvkov) existuje najväčší prvok, tak je jediný maximálny. Nech teda x je najväčší prvok danej množiny, označme ju A. To znamená, že $\forall y \in A : y \leq x$, teda neexistuje väčší prvok. Inak povedané $\forall y \in A : x \leq y \Rightarrow x = y$, teda x je aj maximálny prvok. Ešte potrebujeme overiť, že je jediný. Sporom. Predpokladajme, že aj $\hat{x}$ je maximálny prvok. Teda $\forall y \in A : \hat{x} \leq y \Rightarrow \hat{x} = y$. Táto implikácia má platiť pre každý prvok z A, teda aj pre x. Potom $\hat{x} \leq x \Rightarrow \hat{x} = x$. Keďže x je najväčší, tak $\hat{x} \leq x$. Spolu teda dostávame $\hat{x} = x$.

5. Majme zobrazenie $f : X \to Y$ a podmnožiny $A, B \subseteq X$. Dokážte, že $f(A) - f(B) \subseteq f(A - B)$. Nájdite príklad, keď nenastane rovnosť. ($f(A)$ je obraz množiny A, t.j. $f(A) = \{z | \exists a \in A, f(a) = z\}$.

Riešenie: Uvažujme ľubovoľné $y \in f(A) - f(B)$. Ukážeme, že $y \in f(A - B)$. Ak y je z množinového rozdielu, tak $y \in f(A)$ a zároveň $y \notin f(B)$. To znamená, že $\exists a \in A : f(a) = y$ a zároveň nie je pravda, že by v množine B existoval vzor y, teda $\forall b \in B : f(b) \neq y$. Teda $a \in A$, pre ktoré $f(a) = y$ určite nie je prvkom množiny B, t.j $\exists a \in A - B : f(a) = y$. Čo ale znamená, že $y \in f(A - B)$.

Nájdime ešte príklad, kedy nenastáva rovnosť. Teda chceme aby existoval taký prvok y že $y \in f(A - B) \wedge y \in f(B)$. Teda zobrazenie f nemôže byť injektívne. Napr. nech $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$, pričom $f(1) = f(2) = 1$. Potom $f(A - B) = f(\{2\}) = \{1\}$, ale $f(A) - f(B) = \{1\} - \{1\} = \emptyset$.