

Hovoríme, že relácia R je:

reflexívna ak $(\forall x) [x, x] \in R$,

antireflexívna ak $(\forall x) [x, x] \notin R$,

symetrická ak $[x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R$,

asymetrická ak $[x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \notin R$,

antisymetrická ak $([x, y] \in R \wedge [y, x] \in R) \Rightarrow x = y$,

tranzitívna ak $([x, y] \in R \wedge [y, z] \in R) \Rightarrow [x, z] \in R$,

má vlastnosť *dichotómie* ak $(\forall x, y)([x, y] \in R \vee [y, x] \in R)$.

1. Nájdite reláciu, ktorá je symetrická a tranzitívna, ale nie je reflexívna. Alebo ukážte, že taká relácia neexistuje.

2. Koľko je všetkých relácií ekvivalencie na štvorprvkovej množine?

3. Na množine prirodzených čísel \mathbb{N} definujeme reláciu R ako: aRb práve vtedy, ak a delí b alebo b delí a . Je R reláciou ekvivalencie?

4. Množiny $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sú množiny celých, racionálnych a reálnych čísel. Definujme relácie:

$$T = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - y \in \mathbb{Z}\},$$

$$U = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - y \in \mathbb{Q}\}.$$

Ukážte, že T a U sú relácie ekvivalencie. Opíšte rozklady množiny \mathbb{R} definované týmito reláciami.

5. Označme ako $C(0, 1)$ množinu všetkých spojitých funkcií s hodnotami v \mathbb{R} definovaných na intervale $[0, 1]$. Definujme:

$$[f, g] \in T \Leftrightarrow (\forall x) f(x) \leq g(x) \wedge (\exists y) f(y) < g(y).$$

Ukážte, že T je čiastočné (ostré) usporiadanie množiny $C(0, 1)$ (t.j. T nie je reflexívne lebo $[f, f] \notin T$, ale T je tranzitívne aj antisymetrické). Nájdite dva neporovnateľné prvky.

V čiastočne usporiadanej množine A s usporiadaním \leq sa prvok a nazýva *najmenší* ak $(\forall x \in A) a \leq x$. Prvok b sa nazýva *minimálny* ak $(\forall x \in A)(x \leq b \Rightarrow x = b)$. Podobne, prvok c sa nazýva *najväčší* ak $(\forall x \in A)x \leq c$ a prvok d *maximálny* ak $(\forall x \in A)(d \leq x \Rightarrow x = d)$. Pojmy minimálny a najmenší označujú rôzne veci, hlavne pre množiny, ktoré sú usporiadané iba čiastočne.

6. Nájdite čiastočne usporiadanú množinu, ktorá má práve jeden maximálny prvok a nemá najväčší prvok.

7. Dokážte, že v lineárne usporiadanej množine je minimálny prvok aj najmenší.

8. Dokážte, že ak v čiastočne usporiadanej množine existuje najväčší prvok, tak je jediným maximálnym prvkom.

Bonusové príklady

9. Nech $\mathbb{Q}[x]$ je množina všetkých polynómov v premennej x s racionálnymi koeficientmi. Nech $A[x] = \mathbb{Q}[x] - \mathbb{Q}$ (množinový rozdiel), t.j. $A[x]$ je množina všetkých polynómov stupňa aspoň 1 v premennej x s racionálnymi koeficientmi. Definujme:

$$[f(x), g(x)] \in D \Leftrightarrow g(x) = f(x) \cdot q(x) \quad \text{pre nejaké } q(x) \in A[x].$$

Dokážte, že D je čiastočné (ostré) usporiadanie. Nájdite dva neporovnateľné prvky v $A[x]$.

Pozn.: Relácia D je akosi obdobou relácie deliteľnosti | na množine celých čísel \mathbb{N} .