

1. Ukážte, že množina všetkých konečných podmnožín množiny  $\mathbb{N}$  je spočítateľná. Čo zlyhá, ak by sme sa pokúšali použiť diagonálny princíp na ukázanie toho, že je nespočítateľná?

2. Ukážte, že v rovine nemôžeme mať nespočítateľne veľa po dvojiciach disjunktných otvorených diskov. (Otvorený disk so stredom v  $[x_0, y_0]$  a polomerom  $\varepsilon > 0$  je  $D_\varepsilon[x_0, y_0] = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon\}$ ). Čo sa zmení ak nahradíme 'otvorené disky' 'kružnicami'?

Príklady č. 3 a 4 slúžia na lepšie pochopenie konštrukcie bijektívneho zobrazenia z dôkazu Cantor–Bernsteinovej vety. Bolo by vhodné aby sa každý zo študentov pokúsil o ich vyriešenie.

3. Majme intervaly  $A = (0, 1)$  a  $B = (0, 1)$ . Potom zobrazenia  $f : A \rightarrow B$  (dané predpisom  $x \mapsto x$ ) a  $g : B \rightarrow A$  (dané predpisom  $g : x \mapsto x/2$ ) sú injektívne. Tým pádom sa na ne vzťahuje tvrdenie Cantor–Bernsteinovej vety a medzi množinami  $A$  a  $B$  existuje bijekcia  $h$ . Pozorne si preštudujte konštrukciu z dôkazu Cantor–Bernsteinovej vety, zistite čo budú v tomto prípade množiny  $A_1, A_2, B_1$  a  $B_2$  a ako vyzerá výsledná bijekcia  $h$ .

4. Spravte to isté, čo v príklade č. 3 pre intervaly  $A = (0, 1)$  a  $B = \langle 0, 1 \rangle$ , injekciu  $f : A \rightarrow B$  (danú predpisom  $x \mapsto x$ ) a injekciu  $g : B \rightarrow A$  (vhodnú funkciu nájdite sami).

5. Dokážte, že existuje injekcia z  $\mathbb{R}^2$  do  $\mathbb{R}$ . Existuje injekcia z množiny všetkých postupností s reálnymi hodnotami do  $\mathbb{R}$ ? Vedeli by ste ju skonštruovať?

6. Hovoríme, že postupnosť  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  je *neklesajúca* ak  $f(n+1) \geq f(n)$  pre všetky  $n$  a *nerastúca* ak  $f(n+1) \leq f(n)$  pre všetky  $n$ . Je množina všetkých neklesajúcich funkcií spočítateľná alebo nespočítateľná? Ako je to s množinou nerastúcich funkcií?

### Bonusové príklady

7. Uvažujme rozklad množiny  $(0, 1)$  zodpovedajúci relácii ekvivalencie  $\sim : x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ . Ukážte, že tried rozkladu je nespočítateľne veľa. Existuje bijekcia medzi množinou tried a  $(0, 1)$ ?

8. Zostrojte funkciu  $f : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ , ktorá na každom intervale nadobúda všetky možné hodnoty. Inými slovami, pre každé  $0 \leq a < b \leq 1$  a každé  $c \in \langle 0, 1 \rangle$  existuje  $x$ , také že  $a < x < b$  a  $f(x) = c$ .

9. Nech  $\mathcal{S}$  je taká trieda podmnožín  $\mathbb{N}$ , že pre každé  $A, B \in \mathcal{S}$  máme  $A \subseteq B$  alebo  $B \subseteq A$ . Môže byť  $\mathcal{S}$  nespočítateľná?