

1. Označme  $0 = |\emptyset|$  a  $1 = |\{\emptyset\}|$ . Ukážte, že pre každé kardinálne číslo  $p$  platí:

a)  $p + 0 = p \cdot 1 = p$ ,

b)  $p^0 = 0^0 = 1$ ,

c)  $p^1 = p$ .

(nezabudnite, že kardinálne čísla reprezentujeme nejakými množinami, rovnosť kardinálnych čísel zodpovedá nejakej bijekcii, sčítanie disjunktnému zjednoteniu, súčin kartézskemu súčinu a umocňovanie súvisí so zobrazeniami)

2. Dokážte, že pre ľubovoľné kardinálne čísla  $p, q$  a  $r$  platí:

a)  $p \leq q \Rightarrow pr \leq qr$ ,

b)  $p \leq q \Rightarrow p^r \leq q^r$ ,

c) ak  $r \neq 0$ , potom  $p \leq q \Rightarrow r^p \leq r^q$ . Čo sa stane ak  $r = 0$ ?

3. Zachová sa platnosť tvrdení v príklade č. 4, ak zameníme neostre nerovnosti za ostre?

Pre nekonečné kardinálne čísla platia trochu iné vzťahy, ako by sme čakali:

Napríklad  $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ , lebo  $\mathbb{N}_0 \cup -\mathbb{N} = \mathbb{Z}$ . Podobne  $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ , lebo  $|\mathbb{N}||\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$ .

4. Označme  $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$  a  $c = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ . Použitím nerovností z príkladu 2 a vzťahov spomenutých na prednáške ukážte, že pre každé prirodzené číslo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  platí:

a)  $c \leq nc \leq \aleph_0 c \leq cc \leq c^n \leq c^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = c$ ,

b)  $2^{\aleph_0} = n^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = c^{\aleph_0} = c$ ,

c)  $2^c = n^c = \aleph_0^c = c^c$ .

5. Ukážte, že množina všetkých iracionálnych čísel je nespočítateľná.

### Bonusové príklady

6. Nech  $A$  je nejaká nespočítateľná množina reálnych čísel a zobrazenie  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  je injektívne. Ukážte, že potom existuje iracionálne číslo  $x \in A$  také, že aj  $f(x)$  je iracionálne. Odvoďte z toho, že existuje dvojica iracionálnych čísel  $a, b$  takých, že  $a^b$  je racionálne. Nájdite konkrétny príklad takej dvojice.

7. Existuje nespočítateľný systém  $\mathcal{B}$  podmnožín  $\mathbb{N}$  taký, že pre (rôzne)  $A, B \in \mathcal{B}$  je prienik  $A \cap B$  konečný?