Diskrétna matematika I. – Domáca úloha č. 11

Cvičenia v týždni 6. decembra 2015

---

1. Ukážte, že množina všetkých konečných podmnožín množiny $\mathbb{N}$ je spočítateľná. Čo zlyhá, ak by sme sa pokúšali použiť diagonálny princíp na ukázanie toho, že je nespočítateľná?

2. Ukážte, že v rovine nemôžeme mať nespočítateľne veľa po dvojiciach disjunktných otvorených diskov. (Otvorený disk so stredom v $[x_0, y_0]$ a polomerom $\varepsilon > 0$ je $D_\varepsilon[x_0, y_0] = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon\}$). Čo sa zmení ak nahradíme 'otvorené disky' 'kružnicami'?

Príklady č. 3 a 4 slúžia na lepšie pochopenie konštrukcie bijektívneho zobrazenia z dôkazu Cantor–Bernsteinovej vety. Bolo by vhodné aby sa každý zo študentov pokúsil o ich vyriešenie. Na prednáške som stihol konštrukciu popísať, zatiaľ sme nedokázali, že skonštruované zobrazenie je naozaj bijektívne. Pozri kompletný dôkaz na webstránke.

3. Majme intervaly $A = (0, 1)$ a $B = (0, 1\rangle$. Potom zobrazenia $f : A \to B$ (dané predpisom $x \mapsto x$) a $g : B \to A$ (dané predpisom $g : x \mapsto x/2$) sú injektívne. Tým pádom sa na ne vzťahuje tvrdenie Cantor–Bernsteinovej vety a medzi množinami A a B existuje bijekcia h. Pozorne si preštudujte konštrukciu z dôkazu Cantor–Bernsteinovej vety, zistite čo budú v tomto prípade množiny A_1, A_2, B_1 a B_2 a ako vyzerá výsledná bijekcia h.

4. Spravte to isté, čo v príklade č. 3 pre intervaly $A = (0, 1)$ a $B = \langle 0, 1\rangle$, injekciu $f : A \to B$ (danú predpisom $x \mapsto x$) a injekciu $g : B \to A$ (vhodnú funkciu nájdite sami).

5. Už vieme, že existuje injekcia z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$. Existuje injekcia z množiny všetkých postupností s reálnymi hodnotami do $\mathbb{R}$? Vedeli by ste ju skonštruovať?

6. Hovoríme, že postupnosť $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je *neklesajúca* ak $f(n + 1) \geq f(n)$ pre všetky n a *nerastúca* ak $f(n + 1) \leq f(n)$ pre všetky n. Je množina všetkých neklesajúcich funkcií spočítateľná alebo nespočítateľná? Ako je to s množinou nerastúcich funkcií?

Bonusové príklady

7. Uvažujme rozklad množiny $(0, 1)$ zodpovedajúci relácii ekvivalencie $\sim : x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Ukážte, že tried rozkladu je nespočítateľne veľa. Existuje bijekcia medzi množinou tried a $(0, 1)$?

8. Zostrojte funkciu $f : \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle$, ktorá na každom intervale nadobúda všetky možné hodnoty. Inými slovami, pre každé $0 \leq a < b \leq 1$ a každé $c \in \langle 0, 1\rangle$ existuje x, také že $a < x < b$ a $f(x) = c$.

9. Nech $\mathcal{S}$ je taká trieda podmnožín $\mathbb{N}$, že pre každé $A, B \in \mathcal{S}$ máme $A \subseteq B$ alebo $B \subseteq A$. Môže byť $\mathcal{S}$ nespočítateľná?