Skúška z Diskrétnej matematiky I., 11.1.2012

1. *(6 b.)* Nech $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, atď. sú členy Fibonacciho postupnosti. Ukážte, že platí:

$$F_{n+1}^2 - \left(F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2\right) = F_n^2 + (-1)^n.$$

2. *(5 b.)* Predpokladajme, že platí $A \models \neg B$ a $B \models \neg A$. Ukážte, že potom výrok $A \vee B$ je tautológia.

3. a) *(5 b.)* Zistite, či nasledujúca kvantifikovaná formula je tautológia, alebo nájdite protipríklad

$$(\exists x)(\forall y)(\Phi(x) \Rightarrow \Psi(y)) \Leftrightarrow (\forall y)(\exists x)(\Phi(x) \Rightarrow \Psi(y)).$$

b) *(5 b.)* Nech $A, B \subseteq \mathcal{U}$ a A^{c}, B^{c} označujú komplementy vzhľadom na $\mathcal{U}$. Ukážte, že:

$$A^{\mathrm{c}} \cap B = (A \cap B^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} \Leftrightarrow A = B^{\mathrm{c}}.$$

4. *(5 b.)* Na množine celých čísel $\mathbb{Z}$ zaveďme reláciu $\sim$ nasledovne: pre $x, y \in \mathbb{Z}$ bude $x \sim y$ práve vtedy, keď $|x - y| < 2$. Je $\sim$ reláciou ekvivalencie? Ak áno, aký rozklad množiny $\mathbb{Z}$ predstavuje?

5. *(7 b.)* Pre nasledujúce dva výroky rozhodnite a stručne zdôvodnite či sú pravdivé alebo nepravdivé:

a) V konečnej čiastočne usporiadanej množine existuje najmenší prvok.

b) Prienik dvoch usporiadaní (ako podmnožín $A \times A$) je tiež usporiadaním.

6. *(6 b.)* Dokážte, že pre kardinálne čísla a, b platí binomická veta, teda $(a+b)^2 = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b$ (Nájdite bijekciu medzi množinami, ktorých mohutnosti sú práve pravá a ľavá strana dokazovanej rovnosti v zmysle definície).

7. *(6 b.)* Majme zobrazenie $f : X \to Y$ a množiny $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Predpokladajme, že $A \cap f^{-1}(B) = \emptyset$. Rozhodnite a zdôvodnite, či potom musí platiť $f(A) \cap B = \emptyset$.

8. *(5 b.)* S použitím všeobecných vzťahov medzi kardinálnymi číslami rozhodnite a zdôvodnite, ktoré z kardinálnych čísel $\left(2^{\aleph_0}\right)^{\left(2^{\aleph_0}\right)}$ a $\left(\mathrm{c}^{\aleph_0}\right)^{\left(\mathrm{c}^{\aleph_0}\right)}$ je väčšie alebo či sa rovnajú.