Riešená písomka z diskrétnej matematiky I., 28.10.2009

1. Postupnosť $\{a_n\}$ je definovaná predpisom: $a_{n+1} = 3a_n + 1$ pre $n \geq 1$ a $a_1 = 5$. Ukážte, že $a_n = \frac{11 \cdot 3^{n-1} - 1}{2}$.

Riešenie: Dôkaz matematickou indukciou.
(1) Ukážme, že tvrdenie platí pre $n = 1, 2$.
$a_1 = \frac{11.3^{1-1}-1}{2} = \frac{11.1-1}{2} = 5$, čo bolo zadané.
$a_2 = \frac{11.3^{2-1}-1}{2} = \frac{11.3-1}{2} = 16$, vieme, že $a_2 = 3a_1 + 1 = 16$.
(2) Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n, t.j. že $a_n = \frac{11 \cdot 3^{n-1} - 1}{2}$. Ukážme, že potom aj $a_{n+1} = \frac{11 \cdot 3^n - 1}{2}$. Podľa rekurentného vzťahu:

$$a_{n+1} = 3a_n + 1 =^{(IP)} 3\frac{11 \cdot 3^{n-1} - 1}{2} + 1 = \frac{3.11.3^{n-1} - 3.1}{2} + 1 = \frac{11 \cdot 3^n - 3 + 2}{2} = \frac{11 \cdot 3^n - 1}{2},$$

čo sme chceli dokázať.

2. Ukážte, že pre členy Fibonacciho postupnosti $\{F_n\}$ (t.j. $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$) pre $n \geq 2$ platí:

$$F_n^2 = F_{n+1}F_{n-1} + (-1)^{n+1}.$$

Riešenie: Dôkaz matematickou indukciou.
(1) Ukážme, že tvrdenie platí pre $n = 2$.

$$F_3F_1 + (-1)^3 = 2.1 - 1 = 1 = F_2^2$$

(2) Predpokladajme, že tvrdenie platí po n, t.j. že $F_n^2 = F_{n+1}F_{n-1} + (-1)^{n+1}$. Ukážme, že potom aj $F_{n+1}^2 = F_{n+2}F_n + (-1)^{n+2}$. Počítajme:

$$F_{n+1}^2 = (F_n + F_{n-1})^2 = F_n^2 + 2F_nF_{n-1} + F_{n-1}^2 = F_n(F_n + F_{n-1}) + F_{n-1}(F_n + F_{n-1}) =$$

$$= F_nF_{n+1} + \underbrace{F_{n-1}F_{n+1}}_{F_n^2 - (-1)^{n+1}} =^{(IP)} F_nF_{n+1} + F_n^2 - (-1)^{n+1} = F_n(F_n + F_{n+1}) + (-1)^{n+2} = F_{n+2}F_n + (-1)^{n+2},$$

čím je tvrdenie dokázané.

3. Zistite či je formula $p \vee q$ tautologickým dôsledkom formuly $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow p$.

Riešenie: Vyplňme tabuľku pravdivostných hodnôt:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$	$((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow p$	$p \vee q$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	0

V 8. riadku je formula $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow p$ ohodnotená pravdivo, ale $p \vee q$ nepravdivo. Preto formula $p \vee q$ nie je tautologickým dôsledkom formuly $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow p$. Z definície formula A je tautologickým dôsledkom formuly B, ak pre všetky ohodnotenia, ktoré dávajú pravdivostnú hodnotu 1 formuly B, je aj A pravdivé.

4. Ukážte, že $\neg(B \Rightarrow A) \vdash B$. Môžete použiť uvedené vety a axiómy, modus ponens a vetu o dedukcii.

(A1) $\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$	(V1) $\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
(A2) $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$	(V2) $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$
(A3) $\vdash (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	(V2') $\vdash B \Rightarrow \neg\neg B$
(V0) $\vdash A \Rightarrow A$	(V3) $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Riešenie:

1.		$\vdash$	$(\neg B \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (\neg(B \Rightarrow A) \Rightarrow \neg\neg B)$	(V_3)
2.		$\vdash$	$\neg B \Rightarrow (B \Rightarrow A)$	(V_1)
3.		$\vdash$	$\neg(B \Rightarrow A) \Rightarrow \neg\neg B$	$(MP\ 1., 2.)$
4.	$\neg(B \Rightarrow A)$	$\vdash$	$\neg\neg B$	$(VoD\ 3.)$
5.		$\vdash$	$\neg\neg B \Rightarrow B$	(V_2)
6.	$\neg(B \Rightarrow A)$	$\vdash$	B	$(MP\ 4., 5.)$

5. Ukážte, že nasledujúca kvantifikovaná formula je tautológiou alebo nájdite protipríklad:

$$(\forall x)(\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)) \Rightarrow ((\exists x)\Phi(x) \Rightarrow (\forall x)\Psi(x)).$$

Riešenie: Dôkaz sporom: Nech to nie je tautológia. Potom v nejakom ohodnotení v

$$v((\forall x)(\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x))) \equiv 1 \quad \text{a súšasne} \quad v((\exists x)\Phi(x) \Rightarrow (\forall x)\Psi(x)) \equiv 0,$$

teda $v((\exists x)\Phi(x)) \equiv 1$ a $v((\forall x)\Psi(x)) \equiv 0$.

Negovaním posledného dostávame $v((\exists x)\neg\Psi(x)) \equiv 1$ a teda pre nejaké x_1 máme $v(\neg\Psi(x_1)) \equiv 1$ a $v(\Psi(x_1)) \equiv 0$.

Aby $v((\forall x)(\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x))) \equiv 1$, musí byť nutne $v(\Phi(x_1)) \equiv 0$. To je však možné. Aby platilo $v((\exists x)\Phi(x)) \equiv 1$, stačí, aby pre nejaké $x_2 \neq x_1$ bolo $v(\Phi(x_2)) \equiv 1$. Teda zadaný výrok nie je tautológia.

Napríklad: Nech $\Phi(x) =$ "x je párne prvočíslo" a $\Psi(x) =$ "x je menšie ako 5". Potom zadaný výrok hovorí: "Nech pre každé číslo platí, ak je to párne prvočíslo, tak je menšie ako 5. Potom z existencie párneho prvočísla vyplýva, že každé číslo je menšie ako 5". Čo zrejme nie je pravda. (Stačí si uvedomiť, že pre každé x platí, ak x je párne prvočíslo, tak je menšie ako 5. Párne prvočíslo je 2 a teda také existuje. A rozhodne nie každé číslo je menšie ako 5. T.j. $(1 \Rightarrow (1 \Rightarrow 0))$.)