

Hovoríme, že relácia  $R$  je:

*reflexívna* ak  $(\forall x) [x, x] \in R$ ,

*antireflexívna* ak  $(\forall x) [x, x] \notin R$ ,

*symetrická* ak  $[x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R$ ,

*asymetrická* ak  $[x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \notin R$ ,

*antisymetrická* ak  $([x, y] \in R \wedge [y, x] \in R) \Rightarrow x = y$ ,

*tranzitívna* ak  $([x, y] \in R \wedge [y, z] \in R) \Rightarrow [x, z] \in R$ ,

má vlastnosť *dichotómie* ak  $(\forall x, y)([x, y] \in R \vee [y, x] \in R)$ .

1. Nájdite reláciu, ktorá je symetrická a tranzitívna, ale nie je reflexívna. Alebo ukážte, že taká relácia neexistuje.

2. Koľko je všetkých relácií ekvivalencie na štvorprvkovej množine?

3. Na množine prirodzených čísel  $\mathbb{N}$  definujeme reláciu  $R$  ako:  $aRb$  práve vtedy, ak  $a$  delí  $b$  alebo  $b$  delí  $a$ . Je  $R$  reláciou ekvivalencie?

4. Množiny  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  sú množiny celých, racionálnych a reálnych čísel. Definujme relácie:

$$T = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - y \in \mathbb{Z}\},$$

$$U = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - y \in \mathbb{Q}\}.$$

Ukážte, že  $T$  a  $U$  sú relácie ekvivalencie. Opíšte rozklady množiny  $\mathbb{R}$  definované týmito reláciami.

5. Označme ako  $C(0, 1)$  množinu všetkých spojitých funkcií s hodnotami v  $\mathbb{R}$  definovaných na intervale  $[0, 1]$ . Definujme:

$$[f, g] \in T \Leftrightarrow (\forall x) f(x) \leq g(x) \wedge (\exists y) f(y) < g(y).$$

Ukážte, že  $T$  je čiastočné (ostré) usporiadanie množiny  $C(0, 1)$  (t.j.  $T$  nie je reflexívne lebo  $[f, f] \notin T$ , ale  $T$  je tranzitívne aj antisymetrické). Nájdite dva neporovnateľné prvky.

V čiastočne usporiadanej množine  $A$  s usporiadaním  $\leq$  sa prvok  $a$  nazýva *najmenší* ak  $(\forall x \in A) a \leq x$ . Prvok  $b$  sa nazýva *minimálny* ak  $(\forall x \in A)(x \leq b \Rightarrow x = b)$ . Podobne, prvok  $c$  sa nazýva *najväčší* ak  $(\forall x \in A)x \leq c$  a prvok  $d$  *maximálny* ak  $(\forall x \in A)(d \leq x \Rightarrow x = d)$ . Pojmy minimálny a najmenší označujú rôzne veci, hlavne pre množiny, ktoré sú usporiadané iba čiastočne.

6. Nájdite čiastočne usporiadanú množinu, ktorá má práve jeden maximálny prvok a nemá najväčší prvok.

7. Dokážte, že v lineárne usporiadanej množine je minimálny prvok aj najmenší.

8. Dokážte, že ak v čiastočne usporiadanej množine existuje najväčší prvok, tak je jediným maximálnym prvkom.

### Bonusové príklady

9. Nech  $\mathbb{Q}[x]$  je množina všetkých polynómov v premennej  $x$  s racionálnymi koeficientmi. Nech  $A[x] = \mathbb{Q}[x] - \mathbb{Q}$  (množinový rozdiel), t.j.  $A[x]$  je množina všetkých polynómov stupňa aspoň 1 v premennej  $x$  s racionálnymi koeficientmi. Definujme:

$$[f(x), g(x)] \in D \Leftrightarrow g(x) = f(x) \cdot q(x) \quad \text{pre nejaké } q(x) \in A[x].$$

Dokážte, že  $D$  je čiastočné (ostré) usporiadanie. Nájdite dva neporovnateľné prvky v  $A[x]$ .

*Pozn.:* Relácia  $D$  je akosi obdobou relácie deliteľnosti | na množine celých čísel  $\mathbb{N}$ .