Písomka z Diskrétnej matematiky I., 10.12.2014

1. Dokážte, že pre ľubovoľné množiny A, B, C platí:
a) $A - (A - B)^c \subseteq B \Leftrightarrow A \subseteq B$,
b) $(A - B) \cup C = A - (B \cup C) \Leftrightarrow C = \emptyset$.

2. Nech R a S sú relácie ekvivalencie na A, t.j. $R, S \subseteq A \times A$. Ukážte, že aj relácia zodpovedajúca ich prieniku $R \cap S \subseteq A \times A$ je reláciou ekvivalencie na A. Ako vyzerajú jej triedy ekvivalencie?

3. Na množine $\mathbb{Z}$ máme reláciu $\sim$ definovanú predpisom:

$$a \sim b \qquad \Leftrightarrow \qquad a^2 - 3a + 1 \equiv b^2 + 2b - 4 \mod 5.$$

Ukážte, že relácia $\sim$ je reláciou ekvivalencie. Zistite ako vyzerajú jej triedy ekvivalencie.

4. Čiastočné usporiadanie päťprvkovej množiny A má rovnaký počet maximálnych a minimálnych prvkov a zároveň predpokladáme, že v A existuje najväčší prvok. Ukážte, že potom v A existuje aj najmenší prvok. Nájdite všetky rôzne usporiadania spĺňajúce túto podmienku (t.j. majú rôzne Hasseho diagramy), svoj výsledok zdôvodnite.

5. Majme zobrazenie $f : X \to Y$ a množiny $A, B \subseteq Y$. Predpokladajme, že platí $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$. Rozhodnite a zdôvodnite, či potom musí platiť aj $A \cap B = \emptyset$. ($f^{-1}(C)$ je vzor množiny C, t.j. $f^{-1}(C) = \{x \in X \mid f(x) \in C\}$).