Diskrétna matematika I. – Domáca úloha č. 11

Cvičenia v týždni 17. decembra 2018

Príklady č. 1 a 2 slúžia na lepšie pochopenie konštrukcie bijektívneho zobrazenia z dôkazu Cantor–Bernsteinovej vety. Bolo by vhodné aby sa každý zo študentov pokúsil o ich vyriešenie. Na prednáške som stihol konštrukciu popísať a zdôvodnili sme si, prečo je skonštruované zobrazenie bijektívne. Pozri kompletný dôkaz na webstránke.

1. Majme intervaly $A = (0, 1)$ a $B = (0, 1\rangle$. Potom zobrazenia $f : A \to B$ (dané predpisom $x \mapsto x$) a $g : B \to A$ (dané predpisom $g : x \mapsto x/2$) sú injektívne. Tým pádom sa na ne vzťahuje tvrdenie Cantor–Bernsteinovej vety a medzi množinami A a B existuje bijekcia h. Pozorne si preštudujte konštrukciu z dôkazu Cantor–Bernsteinovej vety, zistite čo budú v tomto prípade množiny A_1, A_2, B_1 a B_2 a ako vyzerá výsledná bijekcia h.

2. Spravte to isté, čo v príklade č. 3 pre intervaly $A = (0, 1)$ a $B = \langle 0, 1\rangle$, injekciu $f : A \to B$ (danú predpisom $x \mapsto x$) a injekciu $g : B \to A$ (vhodnú funkciu nájdite sami).

3. Už vieme, že existuje injekcia z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$. Existuje injekcia z množiny všetkých postupností s reálnymi hodnotami do $\mathbb{R}$? Vedeli by ste ju skonštruovať?

4. Hovoríme, že postupnosť $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je *neklesajúca* ak $f(n + 1) \geq f(n)$ pre všetky n a *nerastúca* ak $f(n + 1) \leq f(n)$ pre všetky n. Je množina všetkých neklesajúcich funkcií spočítateľná alebo nespočítateľná? Ako je to s množinou nerastúcich funkcií?

5. Označme $0 = |\emptyset|$ a $1 = |\{\emptyset\}|$. Ukážte, že pre každé kardinálne číslo p platí:
a) $p + 0 = p \cdot 1 = p$,
b) $p^0 = 0^0 = 1$,
c) $p^1 = p$.
(nezabudnite, že kardinálne čísla reprezentujeme nejakými množinami, rovnosť kardinánych čísel zodpovedá nejkej bijekcii, sčítanie disjunktnému zjednoteniu, súčin kartézskemu súčinu a umocňovanie súvisí so zobrazeniami)

6. Dokážte, že pre ľubovoľné kardinálne čísla p, q a r platí:
a) $p \leq q \Rightarrow pr \leq qr$,
b) $p \leq q \Rightarrow p^r \leq q^r$,
c) ak $r \neq 0$, potom $p \leq q \Rightarrow r^p \leq r^q$. Čo sa stane ak $r = 0$?

7. Zachová sa platnosť tvrdení v príklade č. 4, ak zameníme neostré nerovnosti za ostré?

Pre nekonečné kardinálne čísla platia trochu iné vzťahy, ako by sme čakali:
Napríklad $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, lebo $\mathbb{N}_0 \cup -\mathbb{N} = \mathbb{Z}$. Podobne $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$, lebo $|\mathbb{N}||\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$.

8. Označme $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ a $c = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$. Použitím nerovností z príkladu 6 a vzťahov spomenutých na prednáške ukážte, že pre každé prirodzené číslo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ platí:
a) $c \leq nc \leq \aleph_0 c \leq cc \leq c^n \leq c^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = c$,
b) $2^{\aleph_0} = n^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = c^{\aleph_0} = c$,
c) $2^c = n^c = \aleph_0^c = c^c$.

9. Ukážte, že množina všetkých iracionálnych čísel je nespočítateľná.

Bonusové príklady

10. Nech $\mathcal{S}$ je taká trieda podmnožín $\mathbb{N}$, že pre každé $A, B \in \mathcal{S}$ máme $A \subseteq B$ alebo $B \subseteq A$. Môže byť $\mathcal{S}$ nespočítateľná?

11. Nech A je nejaká nespočítateľná množina reálnych čísel a zobrazenie $f : A \to \mathbb{R}$ je injektívne. Ukážte, že potom existuje iracionálne číslo $x \in A$ také, že aj $f(x)$ je iracionálne. Odvoďte z toho, že existuje dvojica iracionálnych čísel a, b takých, že a^b je racionálne. Nájdite konkrétny príklad takej dvojice.

12. Existuje nespočítateľný systém $\mathcal{B}$ podmnožín $\mathbb{N}$ taký, že pre (rôzne) $A, B \in \mathcal{B}$ je prienik $A \cap B$ konečný?