Diskrétna matematika I. – Domáca úloha č. 1

Cvičenia v týždni 30. septembra 2019

Dokážte nasledujúce tvrdenia.

1. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$.

Definujme postupnosť prirodzených čísel $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ nasledovne:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \quad \text{pre} \quad n \geq 3.$$

(Dostaneme teda postupnosť čísel 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...) Táto postupnosť sa nazýva *Fibonacciho postupnosť*.

3. Dokážte, že každý štvrtý člen vo Fibonacciho postupnosti je deliteľný troma, t.j. $3|F_{4n}$.

4. Dokážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ sú čísla F_n a F_{n+1} nesúdeliteľné, t.j. $nsd(F_n, F_{n+1}) = 1$.

5. Dokážte nasledovnú formulu pre Fibonacciho číslo F_n:

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}.$$

Zistite či sú nasledujúce formuly tautológie:

6. $p \Rightarrow [(\neg q \wedge q) \Rightarrow r]$.

7. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge q) \Leftrightarrow p]$.

8. Rozhodnite či je nasledujúce tvrdenie pravdivé: „Ján ovláda logiku vtedy a len vtedy, ak nie je pravda, že nie je pravda, že Ján ovláda logiku".

9. Rozhodnite či je nasledujúce tvrdenie pravdivé: „Ak je prirodzené číslo a deliteľné troma, potom z faktu, že a nie je deliteľné troma vyplýva, že a je deliteľné piatimi".

Bonusové príklady

10. Zadefinujte logickú spojku *alebo* ($\vee$) pomocou *implikácie* ($\Rightarrow$) a *negácie* ($\neg$).

11. Zadefinujte logickú spojku *a* ($\wedge$) pomocou spojky *alebo* ($\vee$) a *negácie* ($\neg$).

12. Nájdite súčet $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = ?$