Diskrétna matematika I. – Domáca úloha č. 3

Cvičenia v týždni 14. októbra 2019

---

1. Nech T je splniteľná množina formúl. Ukážte, že $T \models A \Rightarrow B$ práve vtedy, keď $T \cup \{A\} \models B$.

2. Nech T je splniteľná množina formúl. Ukážte, že $T \cup \{A \vee B\} \models C$ práve vtedy, keď platí súčasne $T \cup \{A\} \models C$ a $T \cup \{B\} \models C$.

3. Nech T je množina formúl a A je kontradikciou, t.j. A je nesplniteľná. Ukážte, že ak $T \models A$, potom je T tiež nesplniteľná.

4. Ukážte, že formula $\neg a$ je dokázateľná z predpokladov $\{\neg(a \Rightarrow b), \neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg a\}$, t.j. nájdite jej dôkaz v zmysle definície.

5. Nech D je ľubovoľná z axióm výrokovej logiky a E je ľubovoľná formula. Zostrojte dôkaz formule $E \Rightarrow D$.

6. Nech T je množina formúl a A, B, C sú ľubovoľné formule. Ukážte, že ak $T \vdash A \Rightarrow B$ a $T \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ potom aj $T \vdash A \Rightarrow C$. Pomôcka: výjdite z (A2).

7. Zdôvodnite prečo pre formulu $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)$ nemôže existovať dôkaz. Pomôcka: musí byť každá z formúl tvoriacich dôkaz tautológia?

8. Ukážte, že formula $a \Rightarrow b$ je dokázateľná z predpokladu $\{\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg a\}$. Pomôcka: ukážte, že $\{\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg a\} \vdash a \Rightarrow (a \Rightarrow b)$ a použite (A2) a vetu z prednášky
Porovnajte s príkladom č. 8 a) z minulej úlohy.

Definície niektorých pojmov výrokovej logiky:

Hovoríme, že formula A je *tautologickým dôsledkom* formúl $P_1, P_2, \ldots, P_m$, ak pre každé ohodnotenie v, ktoré dáva $v(P_i) \equiv 1$ pre $i = 1 \ldots m$, platí aj $v(A) \equiv 1$. Zapisujeme $P_1, P_2, \ldots, P_m \models A$, resp. ak označíme $T = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$, môžeme písať $T \models A$.

Nech $T = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ je množina výrokových formúl. Hovoríme, že postupnosť $B_1, \ldots, B_n$ je *dôkazom formule A z predpokladov T*, ak:
1) B_n je A
2) Každé B_k pre $k = 1, \ldots, n$ je buď axiómou (A1), (A2) alebo (A3), alebo B_k patrí do T, alebo je B_k bezprostredným dôsledkom aplikácie pravidla modus ponens na nejaké dve formule z $\{B_1, \ldots, B_{k-1}\}$.

Ak existuje dôkaz formule A z predpokladov $T = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ hovoríme, že A je *dokázateľná z predpokladov T*. Zapisujeme $T \vdash A$, resp. $P_1, P_2, \ldots, P_m \vdash A$.

Axiómy:
(A1) $\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
(A2) $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
(A3) $\vdash (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$