Diskrétna matematika I. – Domáca úloha č. 9

Cvičenia v týždni 25. novembra 2019

V čiastočne usporiadanej množine A s usporiadaním $\leq$ sa prvok a nazýva *najmenší* ak $(\forall x \in A) a \leq x$. Prvok b sa nazýva *minimálny* ak $(\forall x \in A)(x \leq b \Rightarrow x = b)$. Podobne, prvok c sa nazýva *najväčší* ak $(\forall x \in A) x \leq c$ a prvok d *maximálny* ak $(\forall x \in A)(d \leq x \Rightarrow x = d)$. Pojmy minimálny a najmenší označujú rôzne veci, hlavne pre množiny, ktoré sú usporiadané iba čiastočne.

1. Nájdite čiastočne usporiadanú množinu, ktorá má práve jeden maximálny prvok a nemá najväčší prvok.

2. Dokážte, že v lineárne usporiadanej množine je minimálny prvok aj najmenší.

3. Dokážte, že ak v čiastočne usporiadanej množine existuje najväčší prvok, tak je jediným maximálnym prvkom.

4. Nech $A = \{a, b, c\}$ a $B = \{x, y\}$. Nájdite nasledujúce zobrazenia (ak existujú):
a) všetky injektívne z A do B, a všetky injektívne z B do A.
b) všetky surjektívne z A do B, a všetky surjektívne z B do A.
c) všetky bijektívne z A do B, a všetky bijektívne z B do A.

5. Vyplýva z toho, že zložené zobrazenie $f \circ g$ je injektívne aj injektivita f? Ako to je s injektivitou g? Čo sa stane ak nahradíme v predchádzajúcich otázkach „injektívnosť" pojmom „surjektívnosť"?

6. Nech A je konečná množina. Dokážte:
a) Ak $f : A \to A$ je injektvne, tak je aj surjektívne.
b) Ak $f : A \to A$ je surjektívne, tak je aj injektívne.
Platia takéto tvrdenia aj pre nekonečnú množinu (napr. $\mathbb{N}$)?

7. Nájdite bijekciu medzi $\langle 0, 1)$ a $\{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$.

8. Nájdite bijekciu medzi intervalmi: $(0, 1)$, $(0, \infty)$.

9. Možinu všetkých zobrazní z X do Y označujeme ako $Y^X = \{f \,|\, f \text{ je zobrazenie z } X \text{ do } Y\}$. Ukážte, že pre neprázdnu množinu A platí:
a) $A^\emptyset = \{\emptyset\}$, b) $\emptyset^A = \emptyset$, c) $\emptyset^\emptyset = \{\emptyset\}$.
Návod: Zobrazenie z A do B, ako relácia, t.j. podmnožina kartézskeho súčinu $A \times B$ má spĺňať nejaké vlastnosti. Ukážte, že v prípadoch a) a c) má takéto vlastnosti prázdna množina, v prípade b) taká podmnožina neexistuje.

Bonusové príklady

10. Nájdite bijekciu medzi intervalmi: $(0, 1\rangle$, $(0, 1)$.

11. Nájdite injektívne zobrazenie z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$.