Diskrétna matematika I. – Vianočná sada úloh

Príprava na skúšku alebo príklady pre tých, ktorých ešte neopustilo nadšenie

---

1. Napíšte negácie nasledujúcich výrokov:
(i) n je párne alebo m je násobkom 3,
(ii) každé $x \in A$ je prvkom $A \cap B$,
(iii) ak dnes neprší, potom nepadajú traktory.

2. Preložte význam nasledujúceho výroku do krátkej slovenskej vety (dá sa to na 5 slov) a tiež napíšte jeho negáciu v symbolickom jazyku. (V tomto príklade premenné m, n, a, b sú chápané ako kladné celé čísla, t.j. $\forall m$ znamená $\forall m \in \mathbb{N}^+$.)

$$(\forall m)(\exists n)(\forall a)(\forall b)[[n \geq m] \wedge [(a = 1) \vee (b = 1) \vee ((ab \neq n) \wedge (ab + 2 \neq n))]].$$

3. Daná je operácia $*$ na prirodzených číslach spĺňajúca:
(i) $1 * n = n - 1$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$,
(ii) $m * 1 = (m - 1) * 2$ pre všetky $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$,
(iii) $m * n = (m - 1) * (m * (n - 1))$ pre $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > 1$.
Nájdite hodnotu $5 * 5$.

4. *Symetrický rozdiel* $A \triangle B$ množín A a B je definovaný ako $(A - B) \cup (B - A)$. Pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt pre výroky $x \in A$, $x \in B$, $x \in C$ ukážte, že operácia $\triangle$ je asociatívna. Ďalej ukážte, že x patrí do $A \triangle (B \triangle C)$ práve vtedy, ak x patrí do nepárneho počtu z množín A, B, C. Použite toto pozorovanie na zostrojenie ďalšieho dôkazu, že $\triangle$ je asociatívna operácia.

5. Definujme binárnu operáciu $*$ na $\mathbb{Z}^2$ nasledujúcou formulou: $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + bc)$. Dokážte, že operácia $*$ je komutatívna a asociatívna. Nájdite predpis pre

$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) * \cdots * (a_k, b_k).$$

6. Nech f je zobrazenie z reálnych čísel do reálnych čísel. Hovoríme, že f je *striktne rastúca funkcia* ak pre $x < y$ je aj $f(x) < f(y)$. Ukážte, že ak je f striktne rastúca, potom je injektívna. Musí nutne byť aj surjektívna? Predpokladajme, že f je bijektívna, $f(0) = 0$ a $f(1) = 1$. Vyplýva z toho, že f je striktne rastúca? Ak je f spojitá?

7. Nech O je obdĺžnik, ktorý sa dá rozdeliť na menšie obdĺžniky, z ktorých každý ma aspoň jednu stranu celočíselnej dĺžky. Ukážte, že aj O má aspoň jednu stranu celočíselnej dĺžky.

8. Nech n je párne číslo a $\mathcal{A}$ systém podmnožín množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ s vlastnosťou, že pre každé $A, B \in \mathcal{A}$ je počet prvkov $A \cap B$ párny (toto platí aj pre dvojicu $A = B$). Koľko množín môže $\mathcal{A}$ obsahovať? Ako sa zmení odpoveď ak množiny v $\mathcal{A}$ majú párny počet prvkov, ale pre $A \neq B$ je veľkosť prieniku $A \cap B$ nepárna?

9. Dá sa uzavretý interval $\langle 0, 1 \rangle$ zapísať ako nekonečné spočítateľné zjednotenie disjunktných neprázdnych uzavretých intervalov?

10. Daných je n bodov v rovine, pričom neležia všetky na jednej priamke. Ukážte, že je možné nájsť priamku, na ktorej ležia práve dva z nich.

11. Nech $\langle a_i, b_i \rangle$ je uzavretý interval kladných reálnych čísel pre $i \in \mathbb{N}$. Predpokladajme, že $\sum_i (b_i - a_i) < \infty$. Vyplýva z toho, že existuje nejaké reálne číslo x také, že nx nepatrí do žiadneho intervalu $\langle a_i, b_i \rangle$ pre každé prirodzené n?

12. Majme nekonečný spočítateľný kruh docentov, z ktorých každý má na hlave klobúk. Klobúky sú modré alebo červené a každý docent vidí klobúky všetkých kolegov okrem toho svojho. V istom momente musia docenti naraz zakričať farbu svojho klobúka. Dajú sa docentom dať také inštrukcie, aby sa, bez ohľadu na distribúciu farieb klobúkov, pomýlilo iba konečne veľa docentov?

13. Majme nekonečný spočítateľný kruh ostrozrakých docentov, z ktorých každý má na hlave klobúk. Klobúk i-teho docenta má farbu, ktorá sa dá zakódovať pomocou trojice reálnych čísel (r_i, g_i, b_i), teda farbu klobúka vyberáme zo *spojitého spektra*. Každý docent vidí klobúky všetkých kolegov okrem toho svojho a vďaka ostrozrakosti vie presne určiť ich farby – trojice (r_j, g_j, b_j). V istom momente musia docenti naraz zakričať farbu svojho klobúka – trojicu reálnych čísel. Dajú sa docentom dať také inštrukcie, aby sa, bez ohľadu na distribúciu farieb klobúkov, pomýlilo iba konečne veľa docentov?

Pre porovnanie: Aká je pravdepodobnosť, že jeden osamotený docent určí správne farbu svojho klobúka (vybranú zo spojitého spektra), ak svoj klobúk nevidí?

14.* Pre kardinalitu množín by sme mohli definovať iné porovnanie ich veľkostí: povieme, že $|A| \geq |B|$, ak existuje surjektívne zobrazenie $f : A \to B$. Otázka potom je, či táto relácia naozaj bude uspriadanie – reflexívnosť a tranzitívnosť sú pomerne priamočiare, pre antisymetriu potrebujeme obdobu Cantor-Bernsteinovej vety pre surjekcie. Platí vôbec?[1] Dala by sa ukázať aspoň Cantorova veta $|\mathcal{P}(M)| > |M|$?

[1] Pozri:
`http://math.stackexchange.com/questions/176972/is-there-a-cantor-schroder-bernstein-statement-about-surjective-maps`
`http://math.stackexchange.com/questions/46168/cantor-bernstein-like-theorem-if-f-colon-a-to-b-is-injection-and-g-colon-a-t`