Príklad Dokážme formulu $A \Rightarrow A$.

Ako?

1. $A \Rightarrow (\overbrace{(A \Rightarrow A)}^{B} \Rightarrow A)$ (A1)
2. $(A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$ (A2)
3. $(A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$ aplikácia MP na 1 a 2
4. $A \Rightarrow (A \Rightarrow A)$ (A1)
5. $A \Rightarrow A$ aplikácia MP na 4, 3.

(je to komplik...)

Pozn. Tvrdenie $\vdash A \Rightarrow A$ sa dá preformulovať na $\vdash A \vee \neg A$

Potiaľto

- Písomka – 23.10. (o dva týždne) / asi vo F1 aj F2 /
- minule → tautologické dôsledky, formálny systém, axiómy, odvodzovacie pravidlo

Podobne ako sme rozšírili pojem tautológie na tautologické dôsledky, ... pridať dodatočné predpoklady aj do našich dôkazov.

Def Nech T je množina výrokových formúl, postupnosť $B_1, \dots, B_n$ je dôkazom formule A z predpokladov T ak:

1) B_n je A
2) každá B_k pre $k = 1, 2, \dots, n$ je buď axióma (A1), (A2) al. (A3) alebo B_k patrí do T, alebo B_k je bezprostredným dôsledkom aplikácie MP na nejaké dve formule z $\{B_1, \dots, B_{k-1}\}$.

Podobne, formula A je dokázateľná z predpokladov T ($T \vdash A$) ak existuje dôkaz A z T.

Lemma: Pre ľubovoľné formuly A, B, C platí:

$$A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$$

Dôkaz:

1. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ (Axióma A2)
2. $(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$ (Axióma A1)
3. $B \Rightarrow C$ [daný predpoklad]
4. $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ [MP na 2 a 3]
5. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ [MP na 4 a 1]
6. $A \Rightarrow B$ [daný predpoklad]
7. $A \Rightarrow C$ [MP na 6 a 5]

vidíme, že aj pomerne jednoduché formule ~~majú~~ (ako $A \Rightarrow A$) majú relatívne dlhé dôkazy. ~~Môžeme tieda predpokl~~

→ potrebujeme nájsť nejaké možnosti ako zjednodušiť štruktúru dôkazov.

Na to je veta o dedukcii:

$\boxed{\text{potiaľto } 2.10.07}$

Veta o dedukcii Nech T je množina formúl a A, B sú formule. Potom $T \vdash A \Rightarrow B$, práve vtedy, keď $T \cup \{A\} \vdash B$.

$\boxed{\text{potiaľto } 8.10.14}$

Dôkaz: 1) Nech $C_1, \dots, C_n$ je dôkaz $A \Rightarrow B$ za predpokladov T. Potom je postupnosť $C_1, \dots, C_n, A, B$ dôkazom B z $T \cup \{A\}$, lebo $C_n = A \Rightarrow B$ a B je priamym dôsledkom MP na predposledné dva členy: C_n a A.

$A \Rightarrow (A \Rightarrow X)$
X
X

2) Nech $D_1, \dots, D_m$ je dôkazom B z $T \cup \{A\}$.
Ukážeme, že pre každé i je $A \Rightarrow D_i$ dokázateľné z T.
a) D_1 je axióma: potom $\vdash A \Rightarrow D_1$ (cvičenie 6)
b) $D_1 \in T$, potom je $T \vdash A \Rightarrow D_1$ (podobne ...)
D_1 je A, potom podľa dokázanej vety $\vdash A \Rightarrow A$.
$i > 1$, môže nastať prípad
b) D_i je MP na D_{j_1}, D_{j_2}, ...
za použitia indukčného predpokladu: $T \vdash A \Rightarrow D_{j_1}$ a $T \vdash A \Rightarrow (D_{j_1} \Rightarrow D_i)$
z toho $T \vdash A \Rightarrow D_i$, (cvičenie č. 8?)

$\boxed{\text{sem } 7.10.09}$

Veta o dedukcii výrazne skracuje dôkazy... môžeme sa na ňu odvolávať v rámci dôkazov. (Aj keď z prísne formálneho hľadiska nepíšeme o dôkazy podľa definície).

Pokus o vytvorenie dôkazu?

$\boxed{9.10.13}$

Príklad $\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

Dôkaz: 1. $\vdash \neg A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (Axióma A1)
2. $\neg A \vdash \neg B \Rightarrow \neg A$ (veta o dedukcii na 1)
3. $\vdash (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ (axióma A3)
4. $\neg A \vdash (A \Rightarrow B)$ (modus ponens na 2 a 3)
5. $\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ (veta o dedukcii na 4)

Príklad $\vdash \neg\neg A \to A$

1.	$\vdash \neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg\neg A)$	predchádzajúca veta
2.	$\vdash (\neg A \to \neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A)$	axióma A3
3.	$\neg\neg A \vdash \neg\neg [illegible] \to \neg\neg\neg A$	veta o ded. na 1.
4.	$\neg\neg A \vdash \neg\neg A \to A$	MP 2,3
5.	$\neg\neg A \vdash A$	veta o dedukcii na 4
6.	$\vdash \neg\neg A \to A$	veta o dedukcii na 5

Tvrdenie Nech A, B sú výrokové formule. Potom $A, \neg A \vdash B$. Čiže, zo sporných predpokladov sa dá dokázať čokoľvek.

Dôkaz. Máme ~~vetu~~ V1: $\vdash \neg A \to (A \to B)$, [illegible] A, B.
Potom použitím vety o deduk[illegible] [illegible]
a ešte raz [illegible]: $\neg A, A \vdash$ [illegible]

Tvrdenie Nech A, B, C sú [illegible] formule.
Pre ľubovoľnú množinu [illegible]
a) $T \vdash A \to (B \to C)$ [illegible]
$T \vdash B \to (A \to C)$
b) Ak $T \vdash A$ a T [illegible] B [illegible]
$T \vdash B$.

Dôkaz. a) dvojnásobné [illegible] ded. [illegible]
$T \vdash A \to (B \to C) \Leftrightarrow T \cup \{A\} \vdash B \to C$ [illegible] $\}\vdash C$
$T \vdash B \to (A \to C) \Leftrightarrow T \cup \{B\} \vdash A \to C$ [illegible] $\}\vdash C$

b) Ak $T \cup \{A\} \vdash B$ [illegible] v. o ded.
aj $T \vdash A \to B$ [illegible] $T \vdash A$,
môžme použiť mo[illegible] $T \vdash B$.

odvodené spojky:

$A \& B = \neg(A \Rightarrow \neg B)$
$A \vee B = \neg A \Rightarrow B$
$A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \& (B \Rightarrow A)$

Tvrdenie Nech A, B sú ľubovoľné výrokové formule.
a z predpokladu A sa dá odvodiť $A \vee B$ aj $B \vee A$.
Lekvir: $\vdash A \to (A \vee B)$, $\vdash A \Rightarrow (B \vee A)$

Dôkaz: Použitím subs. $A \vee B \leftrightarrow \neg A \Rightarrow B$
chceme ukázať:
$$\vdash A \to (\neg A \Rightarrow B) \quad \text{resp.} \quad \vdash A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A).$$
Prvé je ale: $A, \neg A \vdash B$ druhé priamo A1.

Veta o dôkaze rozborom prípadov
Nech $T \cup \{A, B, C\}$ je množina formulí. Potom $T, (A \vee B) \vdash C$
práve vtedy, keď súčasne platí $T, A \vdash C$ aj $T, B \vdash C$.
Dôkaz: $\circ$ ($\Rightarrow$)
$T \vdash (A \vee B) \to C$
Ak $T, (A \vee B) \vdash C$, potom z práve dokázaného ... $(A \vee B)$
$A \vdash A \vee B$, Teda: $T, A \vdash C$. Podobne pre ... .

... platí $T, A \vdash C$ aj $T, B \vdash C$.
$T \vdash A \to C$
$\vdash (A \to C) \to (\neg C \to \neg A)$
$T \vdash \neg C \to \neg A$
$\boxed{T, \neg C \vdash \neg A}$ $\boxed{T, \neg C \vdash \neg B}$

(V3)
$\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

(V?)
$\vdash \neg A \to (\neg B \to \neg(A \vee B))$

$T, \neg C \vdash \neg(A \vee B)$
$T \vdash \neg C \to \neg(A \vee B)$
$\boxed{T \vdash (A \vee B) \to C}$

Dôkaz?

Veta o neutrálnej formuli: Ak $T, A \vdash B$ aj $T, \neg A \vdash B$, potom $T \vdash B$.
Dôkaz: $\vdash A \vee \neg A$ je dokázateľné tvrdenie ($\neg A \Rightarrow \neg A$ - V1?)
čiže ak $T, A \vdash B$ aj $T, \neg A \vdash B$, potom $T \vdash (A \vee \neg A) \to B$
$T \vdash B$.

(príklad)