odvodené spojky:

$A \& B = \neg(A \Rightarrow \neg B)$
$A \vee B = \neg A \Rightarrow B$
$A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \& (B \Rightarrow A)$

Tvrdenie Nech A, B sú ľubovoľné výrokové formule.
a z predpokladu A sa dá odvodiť $A \vee B$ aj $B \vee A$.
(Ekviv: $\vdash A \to (A \vee B)$, $\vdash A \Rightarrow (B \vee A)$)

Dôkaz: Použitím subs. $A \vee B \leftrightarrow \neg A \Rightarrow B$
chceme ukázať:

$\vdash A \to (\neg A \Rightarrow B)$ resp. $\vdash A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$.

Prvé je ale: $A, \neg A \vdash B$ druhé priamo A1.

Veta o dôkaze rozborom prípadov
Nech $T \cup \{A, B, C\}$ je množina formulí. Potom $T, (A \vee B) \vdash C$ práve vtedy, keď súčasne platí $T, A \vdash C$ aj $T, B \vdash C$.

Dôkaz: $\circ$ ($\Rightarrow$)

$T \vdash (A \vee B) \to C$

Ak $T, (A \vee B) \vdash C$, potom z práve dokázaného $A \vdash A \vee B$, Teda: $T, A \vdash C$.

platí $T, A \vdash C$ aj $T, B \vdash C$.

$T \vdash A \to C$

$\vdash (A \to C) \to (\neg C \to \neg A)$

$\vdash (A \to B) \to (\ldots \neg A))$

$T \vdash \neg C \to \neg A$

$\boxed{T, \neg C \vdash \neg A}$ $\quad$ $T, \neg C \vdash \neg B$

$T, \neg C \vdash \neg(A \vee B)$

$\vdash \neg A \ldots$

$T \vdash \neg C \to \neg(A \vee B)$

$\boxed{T \vdash (A \vee B) \to C}$

Dôkaz?

Veta o neutrálnej formuli Ak $T, A \vdash B$ aj $T, \neg A \vdash B$, potom $T \vdash B$.

Dôkaz: $\vdash A \vee \neg A$ z dokázaného tvrdenia ($\neg A \Rightarrow \neg A$ – VO)
Či že ak $T, A \vdash B$ aj $T, \neg A \vdash B$, potom $T \vdash (A \vee \neg A) \to B$
$T \vdash B$.

potiaľto

Písomka [príklady na indukciu, dokazovanie..., deliteľnosť (?)]
F1, F2 / 23.10. o 8:00
ak nemôžete - e-mail / náhradný termín

Dokázateľnosť a ohodnotenie

Dokázateľnosť z predpokladov spojiť s tautologickým dôsledkom ...

Ako spojiť dokázateľnosť s ohodnotením? pozrime sa na toto:

$A \Rightarrow B$ pri ohodnotení $v(A)=1$, $v(B)=1$

A	B	
1	1	$A, B \vDash A \Rightarrow B$
1	0	$A, \neg B \vDash \neg(A \Rightarrow B)$
0	1	$\neg A, B \vDash A \Rightarrow B$
0	0	$\neg A, \neg B \vDash A \Rightarrow B$

Ax 1

V8 (?) ← doplniť $A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$

veta 2, V1

$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

A niečo podobné platí vo všeobecnosti ...
Nech v je ľubovoľné ohodnotenie, potom B^v bude:

$$B^v = \begin{cases} B & \text{ak } v(B)=1 \\ \neg B & \text{ak } v(B)=0. \end{cases}$$

Lemma Nech v je fixné ohodnotenie prvotných formúl a nech všetky prvotné formule vyskytujúce sa v A sú medzi prvotnými formulami $p_1, \ldots, p_n$. Potom
$$\{p_1^v, p_2^v, \ldots, p_n^v\} \vdash A^v.$$

Sem 16.10.13

Dôkaz (indukciou podľa konštrukcie A)

1) Ak je A prvotná ...
2) Ak je A tvaru $\neg B$ ... základe indukčného predpokladu lemma platí pre B, budú dva prípady:
   a) ak $v(B)=1$, potom ... B^v je B a A^v je $\neg\neg B$.
   Podľa IP platí ... $\vdash B$
   a odvodíme ... $\vdash \neg\neg B$
   b) ak $v(B)=0$, potom ... B^v je $\neg B$
   rovnako ... A^v je A ...
3) Ak je A tvaru ... platí pre B aj C. Podľa prípadu ... $v(A)=0$ | $A^v = \neg$ ... | $A^v = B$ ...

$v(B)=1$, $v(C)$ ... $\{\} \vdash B$, $\{\} \vdash \neg$ ...

V8 $\vdash B \Rightarrow (\neg C \Rightarrow \neg(B \Rightarrow C))$

atď ...

Veta (Postova): Formule dokázateľné vo výrokovej logike sú práve tautológie. Čiže pre ľub. výrokovú formulu platí:

$\vdash A$ práve vtedy keď $\models A$.

Dôkaz: ($\Rightarrow$) urobili sme minule, indukciou podľa dĺžky dôkazu... Modus ponens je dobré pravidlo.

($\Leftarrow$) Nech A je tautológia a $p_1, \dots, p_n$ prvotné formule, ~~ktoré~~ sa vyskytujúce sa v A.

Potom pre ľubovoľné ohodnotenie w máme:

$$\{p_1^w, \dots, p_n^w\} \vdash A \qquad (A^w = A, \text{ lebo } w(A)=1 \Leftarrow \text{je to taut.})$$

Zoberme ohodnotenie w', tak ktoré sa líši od w iba v hodnote na p_n. Potom:

$$\{p_1^{w}, \dots, p_n^{w'}\} \vdash A.$$

Keďže tu môžeme použiť vetu o [illegible] a odvodiť: $\{p_1^w, \dots, p_{n-1}^w\} \vdash A$.

~~môžeme pokračovať...~~ až dostaneme $\vdash A$.

Spornosť a úplnosť výrokovej [illegible]

Formálny systém je **sporný** ak [illegible] formálny ľubovoľná formula. Formálny systém [illegible] nie je sporný nazývame **konzistentný** (bezosporný).

Veta: výroková logika je **bezosporný** [illegible]

Dôkaz: Ak je dokázateľná ľubovoľná formula, [illegible] A (aj pre formulu) musí byť $\vdash A$ aj $\vdash \neg A$. Ale, [illegible] $\vdash A$ implikuje $\models A$, to je ale [illegible].

$\boxed{\text{sem}}$

Množina T výrokových formúl je **sporná** ak z predpokladov [illegible] je dokázateľná [illegible] výroková formula. Ak množina výrokových [illegible] nie je [illegible]

Veta o úplnosti Nech T je množina výrokových formúl. Potom platí:

a) T je bezosporná, práve vtedy ak je splniteľná

b) Pre ľubovoľnú výrokovú formulu A platí $T \vdash A$ práve [illegible] ak $T \models A$

(bez dôkazu)

Zhrnutie a porovnanie svetov...

Predikátová logika

- Čo sa stane ak pridáme do nášho jazyka ďalšie súčasti?
  - premenné $x, y, z, x_1, \dots$
  - kvantifikátory $\forall, \exists$
  - predikáty p, q, p_1
  - funkčné symboly $f, g, \dots$

Situácia bude komplikovanejšia, ale stále sa môžeme baviť o ohodnoteniach, pravdivosti, dôkazoch a axiómach či bezospornosti a úplnosti
– keďže toto je ťažké odkázať na nejakú ... vrátia a ... efektívne

substitúcia

[čo všetko tam patrí...

- Príklad: • aritmetika: $0, +, \cdot, S(x)$, rovnosť
  predikáty
  funkč. symboly
  - teória množín: $\in, =$ predikáty

Príklad formuly:

- $(\forall x)(\forall y)(S(x)+y = S(x+y))$ $\quad (\neg\exists x)(S(x)=0)$

$S(0) + \dots = S(S(0))$

zatiaľ ...

- viazaný, voľný výskyt premennej

- $(x=0)$ ← voľný
- $(\exists x)(x=0)$ ← viazaný
- $(\exists x)(x=y)$ ← x-viazaný, y-voľný

Formula A je **otvorená** – ak neobsahuje žiadnu viazanú premennú
uzavretá – ak neobsahuje žiadnu voľnú premennú.

Substitúcia $(\forall x)\,\varphi(x) \longleftrightarrow (\forall y)\,\varphi(y)$

Musíme si však dávať pozor... $A: (\exists y)(x = y+y)$ — x je párne

a substitúcia $(x) \to (y+1)$ $A': (\exists y)(y+1 = y+y)$

táto substitúcia však nedáva $(y+1)$ je párne...

(Sem 23.10.B)
(bol som prvý...)

Ako priradiť pravdivostné hodnoty formulám v nejakom jazyku?

Realizácia $\mathcal{M}$:

- množina M — (univerzum) — určuje možné hodnoty premenných
- priradenie $\forall$ funkčnému symbolu f $\longleftrightarrow$ $f_M : M^n \to M$
- priradenie $\forall$ predikátovému symbolu P $\longleftrightarrow$ $P : P_M \subseteq M^n$

Veľkosti

v štandardnej aritmetike:

- $(\exists x)(x=c)$ → pravdivé
- $(x=0)$??

potrebujeme ešte ohodnotenie: $e(x) = 0, 1$

~~... $(\exists x)(x=0)$ ... pre všetky uzavreté formule.~~

tvar formulí

Def. Formula A je v prenexnej forme ak má tvar: $Q_1x_1 \dots Q_nx_n\, B$

kde:
1) $n \geq 0$, a Q_i je $\exists$ alebo $\forall$
2) $x_1, \dots, x_n$ sú navzájom rôzne premenné
3) B je otvorená formula.

Príklad: $\forall x \exists y \exists z\, (x+z=y)$ je

$\forall x\, (x \neq 0 \to \forall y \exists d \exists z\, (z<x \ \&\ x \cdot d + z = y))$ nie je.

Veta: ku každej formuli A sa dá zostrojiť formulu A' v prenexnej forme, ktorá je s ňou ekvivalentná.