Príklad: $((\forall x) A(x)) \Rightarrow B$ (B neobsahuje x ako voľnú premennú)

Riešenie $(\exists x)(A \Rightarrow B)$

~~Príklad~~ $[(\forall x_1)\ a(x_1)] \Rightarrow [(\exists x_2)\ b(x_2)]$

Riešenie: $(\exists x_2)((\forall x_1)\ a(x_1) \Rightarrow b(x_2))$

$(\forall x\ A(x)) \Rightarrow B$

$(\exists x)(A(x) \Rightarrow B)$

$\forall x\ A(x)$	B	imp	$(\exists x)(A(x) \Rightarrow B)$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

~~$\exists x\ A(x)$~~	~~B~~	~~imp~~	~~$\exists x (A \Rightarrow B)$~~
~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~
~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~
~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~

Príklady: ~~[illegible]~~

→ pár slov ku kvantifikátorom:

x \ y	y_1	y_2	y_3			
x_1	$\phi(x_1,y_1)$	$\phi(x_1,y_2)$				
x_2						
x_3						
$\vdots$						

potom čo znamená:

$(\forall x)(\forall y)\ \phi(x,y)$ → samé 1

$(\forall x)(\exists y)\ \phi(x,y)$ → v každom riadku aspoň 1 jednotka

$(\forall y)(\exists x)\ \phi(x,y)$ → v každom stĺpci aspoň 1 jednotka

$(\exists x)(\forall y)\ \phi(x,y)$ → riadok plný jednotiek

$(\exists x)(\exists y)\ \phi(x,y)$ → aspoň jedna jednotka v tabuľke

$(\forall x)\ \phi(x,x)$ → na uhlopriečke sú jednotky

[illegible]ky:

Teória množín

potiaľto: 23.10.07

- História: Pomerne nová časť matematiky, ktorá úspešne dokáže narábať s nekonečno, nekonečnými [illegible].

Azda najviac sa o jej vznik zaslúžil Georg Cantor (18[illegible]90) (koniec 19. st.) [illegible] však viedla k ~~[illegible]~~ paradoxom.

Množina:
- zadefinovaná [illegible] vymen[illegible] prvkov: $\{a, b, c,$
- alebo nejakou podmienkou: $M = \{x ; R(x)\}$

- dve množiny sa rovnajú ak majú rovnaké pr[illegible]

$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

$(\forall x) A(x)$	B	imp
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

B)) Ako to nájsť?

predpokladajme riešenie $(Qx)(A(x) \Rightarrow B)$ ...

- Russelov paradox: uvažujme M danú podmienkou:

$$x \in M \Leftrightarrow x \notin x.$$

potom pre M dostávame:

$$M \in M \Leftrightarrow M \notin M$$ čo je spor.

TOTO SOM STIHOL

- ~~ako~~ prečo je to tak?
  množín (alebo objektov) spĺňajúcich $x \notin x$ je mnoho, čiže M by muselo byť veľmi veľké ... až take veľké že presahuje svet množín.
- čiže charakteristická vlastnosť nie vždy opisuje ... [Potiaľto]

- Podmnožiny

A je podmnožinou B $A \subseteq B$ ak ...

A je vlastnou podmnožinou B, ak $A \subset B$ ak ...

... prvú vetu: množiny A, B platí $(A=B) \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

$A=B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B \wedge y \in B \Rightarrow y \in A \Leftrightarrow$

$\Rightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

- Vzťah $\subseteq$ sa nazýva inklúzia

- ... množina – množina, do ktorej nepatrí žiaden prvok. Taká množina je ... (rozmyslieť si prečo)

Sem 28.10.0

Ako ... ďalšie množiny?

- Zadefinujme: $[x,y]$ – usporiadaná dvojica
  $([x,y]=[u,v]) \Leftrightarrow (x=u \wedge y=v)$

neusporiadaná dvojica: $X = \{x, y\}$

$z \in X \iff (z = x \lor z = y)$

zjednotenie $A \cup B$:

$z \in C \iff (z \in A \lor z \in B)$

prienik

$z \in C \iff (z \in A \land z \in B)$

karteziánsky súčin $A \times B$:

$z \in D \iff (\exists x \in A)(\exists y \in B)\ z = [x, y]$

potenčná množina $\mathcal{P}(A)$:

$z \in E \iff z \subseteq A$

Príklady: (1) $\emptyset \subseteq$ každej množiny $(\forall A): \emptyset \subseteq A$

Dôkaz $\forall x \in \emptyset \quad x \in A \quad ✓ \quad$ OK

Čo s $\emptyset \in A$?

(2) $X \cup \emptyset = X$

(3) $A = \emptyset,\ B = \{\emptyset\},\ C = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$A \cap B = \emptyset,\ B \cup C = C,\ B \cap C = B,\ B \subseteq C$

Ak označíme ~~$A = \emptyset$~~ $A = 0,\ B = 1,\ C = 2$

potom: $1 = \{0\},\ 2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$

takto sme skonštruovali prirodzené ... teórii množ...

(4) je $A \times B \overset{?}{=} B \times A$?

Množinová algebra

a) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ idem...

b) $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$ komu...

c) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $\quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Definovať komplement *

e) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $\quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

f) $(A^c)^c = A$

g) $A \cap \emptyset = 0$, $A \cup \emptyset = A$

U – univerzum

h) $A \cap A^c = \emptyset$ $\quad$ $A \cup A^c = U$

i) $A \cap (A \cup B) = A$ $\quad$ $A \cup (A \cap B) = A$

Dôkazy ?

Def: • Nech A, B sú množiny. Rozdiel $A - B = \{x \in A, x \notin B\}$.

$A \setminus B$

• Univerzum U: $\forall A \subseteq U$ $\quad$ A^c ($\bar{A}$) $= U - A$.

Dôkaz (d) $\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

"$\subseteq$" nech $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \Rightarrow x \in B \wedge x \in C$

1) $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2) $x \in C \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

"$\supseteq$" $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in A \cap B \vee$

$\Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge$

$\Rightarrow (x \in A) \wedge (x \in B \cup x \in C)$

$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$\Rightarrow P$

Príklady na rozdiely:

Nech A, B, C sú ľubovoľné množiny

a) $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

b) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

c) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

d) $\ldots = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

e) $\ldots = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

f) $\ldots (B, C)$.

Príklady na súčiny

1) $A \times B \neq \emptyset \Leftrightarrow A \neq \emptyset \wedge B \neq$

2) $A \times B \neq \emptyset \wedge A \times B = C \times D \Rightarrow A \ldots B = D$

3) $C \neq \emptyset \wedge A \times C = B \times C \Rightarrow A = B$

4) $A \subseteq B \Rightarrow A \times C \subseteq B \times C$

5) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ $\quad$ $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

6) $(A - B) \times C = A \times C - B \times C$

Dôkazy: priamočiare cvičenia

30.10. potiaľto.