Binárne relácie

- **Def** Pre množiny A, B je binárna relácia je ľubovoľná podmnožina $R \subseteq A \times B$.

  Značenie: $(a,b) \in R \iff aRb$.

  Takáto podmnožina definuje zobrazenie ~~ta~~ $A \times B \to \{0, 1\}$

  môžme zapísať do tabuľky...

Zopakovať Relácia je podmnožina: $R \subseteq A \times A$

- **Def** Relácia sa nazýva
  - a) reflexívna $\forall x \in A \quad xRx \iff id_A \subseteq R$
  - b) symetrická $aRb \iff bRa \quad \overline{R} \subseteq R$
  - c) tranzitívna $\forall a,b,c \in A \quad aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc \iff R \circ R \subseteq R$.

ako to povedať v jazyku podmnožín $A \times A$?

"diagonála"

klasifikácia: $id_A = \{(a,a) \mid x \in A\}$

"opačná relácia" · $\overline{R} = \{(b,a) \in A \times A ; (a,b) \in R\}$

· zloženie - $R \circ R \circ R \circ R \circ R$ ...

Def: ~~B~~ Nech A, B, C sú množiny, R z A do B, S z B do C. Zložením (kompozíciou) je $RS = \{(x,z) \in A \times C ; \exists b \in B : xRb \wedge bSz\}$.

· ako spraviť z relácie reflexívnu? $R \cup id_A$

symetrickú? $R \cup \overline{R}$

tranzitívnu? $R \circ R \circ R \circ$ ... R

- Relácia ekvivalencie je relácia, ktorá je reflexívna, symetrická a tranzitívna. (Ak R je relácia ekvivalencie, xRy hovoríme, že x je ekvivalentné s y.)

- príklady: rovnosť $=$, modulo $\equiv$, rovnosť $\neq$

- rozklad množiny A. $S \subseteq \mathcal{P}(A)$

$S \subseteq \mathcal{P}(A)$

Systém sa nazýva rozkladom množiny A, ak platí:

a) $\forall X \in S$; $X \neq \emptyset$

b) $\forall X, Y \in S \quad X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset$

c) pre každé $x \in A$ existuje $X \in S : x \in X$.

~~USPORIADANIA~~

Ak máme rozklad, môžme definovať reláciu ekv:

$aRb \iff a,b$ sú prvkami tej istej množiny v rozklade:

~~$\exists i \in I; a \in A_i \wedge b \in A_i$~~

$\exists X \in S, a \in X \wedge b \in X$

Tvrdenie: takto definovaná relácia je reláciou ekvivalencie

- overiť
  - reflexívnosť ✓
  - symetrickosť ✓
  - tranzitívnosť ✓

Platí aj opačné tvrdenie:

Tvrd. Ak máme reláciu R na A ekvivalencie, prislúší k nej a rozklad množiny A. definovaná $aRb \iff a,b$ sú prvkami tej istej množiny v rozklade.

Príklad: $a \equiv b \pmod 5$ pre $a,b \in \mathbb{Z}$

- je toto relácia ekvivalencie?
- čo je príslušný rozklad $\mathbb{Z}$?

Usporiadanie

Def. Usporiadaním na množine A rozumieme bin. operáciu ...

a) reflexívna

b) tranzitívna

c) antisymetrická ← Def. ($\forall_{x,y}$: $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$)

Potom hovoríme, že $(A, \leq)$ je usporiadaná množina.

Tvrdenie: Ak R je usporiadanie mn., potom aj $\bar{R}$ je usporiadanie.

Príklad: $\mathcal{P}(A)$ je usporiadanie vzhľadom na inklúziu ...

Q: Musia byť všetky dvojice v relácii? Nie →

v tedy hovoríme, že prvky sú neporovnateľné a množina je čiastočne usporiadaná.

k definícii môžeme pridať:

d) $\forall x,y \in A$: $x \le y \vee x \ge y$ (dichotómia)

ak množina spĺňa túto podmienku hovoríme o totálnom usporiadaní (lineárne usporiadaná).

potiaľto 6.11.

Príklad • $A=\{0,1\}$ $(A,\le)$ $0\le 0$, $0\le 1$, $1\le 1$. ← lin. usp.

• $A^n = A\times A\times\dots\times A$

$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in A^n$

$x\le y \Leftrightarrow \forall_i \; x_i\le y_i$ ← je totálne usp? nie

potiaľto iba...

Naproti tomu môžeme definovať tzv. lexikografické usporiadanie:

• Nech $(A,\le)$ je lineárne usporiadaná — abeceda. (môže byť i nekonečná)

definujme: množinu všetkých slov:

• A^n, $A^0=\{\emptyset\}$ $A^* = \bigcup_{n\in N_0} A^n$.

usporiadanie ako v slovníku:

• $(A^*,\le_e)$: $X = x_1x_2\dots x_n$, $Y=y_1y_2\dots y_m$

$X\le_e Y \Leftrightarrow \exists$ index i : $x_i < y_i \wedge x_j=y_j \; \forall j<i$

alebo: $m\ge n \wedge x_i=y_i$ pre $i=1,2,\dots,n$

sem 11.11.08

Názvoslovie: • Prvok $x\in A$ nazveme minimálnym prvkom mn. A

ak $\forall y\in A$, $y\le x \Rightarrow y=x$.

• analogicky definujeme maximálny prvok.

• Prvok $x\in A$ nazveme najmenším ak $\forall y\in A$, x

• analogicky najväčší

Pozn • v množine môže existovať viacero minimálnych prvkov, ktoré sú navzájom neporovnateľné.

• koľko najmenších?

→ ak existuje jediný minimálny je aj najmenší?