k definícii môžeme pridať:

d) $\forall x,y \in A: x \leq y \vee x \leq y$ (dichotómia)

ak množina spĺňa túto podmienku hovoríme o totálnom usporiadaní (lineárne usporiadaná)

potiaľto 6.11.

Príklad

- $A = \{0,1\}$ $(A, \leq)$ $0 \leq 0$, $0 \leq 1$, $1 \leq 1$ ...
- $A^n = A \times A \times \ldots \times A$

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A^n$

$x \leq y \Leftrightarrow \forall i \;\; x_i \leq y_i$

potiaľto iba...

Napríklad takto môžeme definovať tzv. lexikografické usporiadanie:

- Nech $(A, \leq)$ je lineárne usporiadaná — abeceda. (môže byť nekonečná)

definujme: množinu všetkých slov:

- A, $A^0 = \{\emptyset\}$ $\qquad A^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A^n$.

usporiadanie ako v slovníku:

- $(A^*, \leq_e)$: $X = x_1 x_2 \ldots x_n$, $Y = y_1 y_2 \ldots y_m$

$X \leq_e Y \Leftrightarrow \exists$ index i: $x_i < y_i \wedge x_j = y_j$ ...

alebo: $m \geq n \wedge x_i = y_i$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$

(sem 11.11.08)

Názvoslovie:

- Prvok $x \in A$ nazveme minimálnym prvkom na $\leq$ ak $\forall y \in A$, $y \leq x \Rightarrow y = x$
- analogicky definujeme maximálny prvok.
- Prvok $x \in A$ nazveme najmenším ak $\forall y \in A$ ...
- analogicky najväčší

Pozn.

- v množine môže existovať viacero minimálnych prvkov, ktoré sú navzájom neporovnateľné.
- Koľko najmenších?
  - $\rightarrow$ ak existuje jediný minimálny je aj najmenší!

toto som spravil.

Usporiadania môžme zakresliť do diagramu "Hasselo diagram". ?

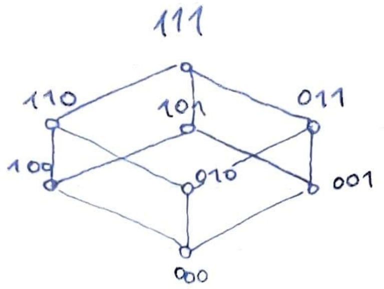
Príklady

$x \leq y \wedge \nexists z: x \leq z \leq y$

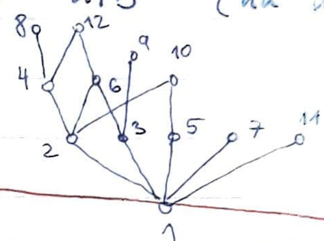
$\to$ x bezprostredne predchádza y, $\{x \leq y\}$

a $\{x \neq y\}$

1) $A = \{0,1\}^3$



2) $\mathbb{N} - \{0\}$ $\quad a \subset b \Rightarrow a | b$ (na množine $1, 2, \ldots, 12$)



3) graf lineárne usporiadanej množiny:

4) graf $\mathbb{R}$? (nekonečná...)

V čom je problém? zoberme: $B \subset \mathbb{R}$; $\{ \ldots y ; y < x \}$ ← nemá maximálny prvok...

S tým súvisí nasledujúci pojem:

(dolná hranica)

Def Infimum množiny $B \subseteq A$, (ak existuje) ($i \in A$ ... prvok $i \in A$), ktorý spĺňa:

1) $\forall x \in B \quad x \geq i$

2) $\forall y \in A \quad \forall x \in B: \quad \ldots \quad i \geq y$.

- ak $B = A \Rightarrow$ i je najmenší prvok
- podobne supremum.

~~Cvičenie~~ Usporiadaná množina $(A, \leq)$ sa nazýva dobre usporiadaná, ak každá ~~jej~~ neprázdna podmnožina množiny A má najmenší prvok.

Dôkaz: Dobre usporiadaná množina je lineárne usporiadaná: pre $x, y \in A$: $\{x, y\}$ má najmenší prvok, teda sú porovnateľné... ($x \leq y$ alebo $y \leq x$)

Potiaľto minule 13.11.

Zobrazenie:

Pod zobrazením obyčajne rozumieme: $f: X \to Y$, taká, že $f: x \mapsto ~~f(x)~~\ y = f(x)$.

Vedeli by sme toto popísať pomocou množín?

$\to$ $f \subseteq A \times B$, taká, že: 1) $\forall x \in A \ \exists y \in B : [x, y] \in A$
2) $\forall x \in A : [x, y_1], [x, y_2] \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

(prosté) **Def** Zobrazenie $f: A \to B$ je injektívne $:\Leftrightarrow \forall a, c \in A$
$\forall f(a) = b = f(c) \Rightarrow a = c$

(na) $f: A \to B$ je surjektívne $\Leftrightarrow \forall b \in B \ \exists a \in A \ f(a) = b$

(jedno-jednoznačné) $f: A \to B$ je bijektívne $\Leftrightarrow$ je injektívne & surjektívne

(označ. - písomka, voľno, konz. hodiny)

potiaľto

Podobne ako pre relácie,

Príklad

~~Tvrdenie~~: Môžeme definovať $f = \bar{f}$. Potom $\bar{f} \subseteq B \times A$.

Čo vieme povedať o $\bar{f}$, ak f je injekcia, surjekcia, bij.?

je inj. o $\forall b \in B$ ~~existuje~~ , že $[b, a_1] \in \bar{f}$, $a \in A$, $[b, a_2]$

(jednoznačne definovaná relácia)

f je sur o $\forall b \in B$ existuje aspoň 1 taká, že $[b, a] \in \bar{f}$, $\in A$

(všade definovaná relácia)

f je bij. o spĺňa podmienky (1) (2) je zobrazenie.

(inverzné zobrazenie)

Zloženie zobrazení...

Veta: Nech $f: A \to B$, $g: B \to C$ sú zobrazenia. Potom

1) f, g sú injekcie $\Rightarrow$ $g \circ f$ aj $f \circ g$ sú injekcie

2) f, g sú surjekcie $\Rightarrow$ $g \circ f$ — " —

3) f, g sú bijekcie $\Rightarrow$ $g \circ f$ je bijekcia

Sem 18.11.08

Pozn! $B^A = \{f: A \to B\}$ množina všetkých zobrazení.

o $|B^A| = ?$

o ak $A = \emptyset$, koľko to bude? $B^A = \{\emptyset\} = B^\emptyset$

(Poznámka: $f: \emptyset \to B$, $g: A \to \emptyset$)

MOHUTNOSŤ MNOŽÍN (štúdium množín pomocou zobrazení)

[bijekcia ↔ mohutnosť] **Def** Množiny A, B majú rovnakú mohutnosť ak existuje bijekcia $f: A \to B$.

- ~~M je dobre usporiadaná~~

Pozn
- reflexívna
- symetrická
- tranzitívna

} akási ekvivalencia na množinách

- ~~$\langle 0,1 \rangle$ a $\langle 9,13 \rangle$ majú rovnakú mohutnosť~~
  ~~podobne $\langle 0,1 \rangle$ a $(0,1)$...~~

rôznej mohutnosti $\{1,2,3,4\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\},\emptyset\}, \{\{\{\emptyset\},\emptyset\},\{\emptyset\},\emptyset\}\}$

$\{a,b,c,d\}$

Príklady:
- $|A| = (n)$ ← konečné množiny
- $|A| = n$, $|B| = m$ potom nemajú rovnakú mohutnosť.
  Dôkaz indukciou 1) $|\emptyset| \neq |\{1\}|$
  2) ak $|A| \neq |B|$ potom $|A+1| \neq |B+1|$
  ČO SA TU MYSLÍ?
  V zmysle definície - neexistuje bijekcia
- $\mathbb{N}$
- $\mathbb{Q}$
- $\mathbb{R}$
- $\mathbb{C}$

(Zopakovanie: lineárne usporiadaná & každá neprázdna má najmenší prvok - dobre usporiadaná.
Tvrdenie konečné množiny sú dobre usporiadané. (Indukciou) (napr. každá konečná podmnožina má max. min)

Tvrdenie $\mathbb{N}$ je dobre usporiadaná množina.

Dôkaz

Nech $M \subset \mathbb{N}$. a M je neprázdna. Potom:

$\{1,2,3,4,\dots,m\}$ - je konečná - t.j. dobre usporiadaná.

$\{1,2,3,\dots,m\} \cap M \neq 0$ má najmenší prvok [illegible]

zároveň najmenším prvkom M.

TOTO SOM [illegible] 20.11

Def 1) $f: \mathbb{N} \to A$ sa nazýva **postupnosť** s hodnotami v A. $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$

2) $f: \{1,2,\dots,n\} \to A$ konečná postupnosť s hodnotami v A.

Def
- Množina A sa nazýva nekonečne spočítateľná ak je rovnakej mohutnosti ako $\mathbb{N}$. t.j. existuje bijekcia $f: \mathbb{N} \to A$ (napr. postupnosť)
- Množina A sa nazýva spočítateľná ak je konečná, alebo nek. spoč.
- Množina A sa nazýva nespočítateľná ak nie je spočítateľná (príklad [illegible])