MOHUTNOSŤ MNOŽÍN

(štúdium množín pomocou zobrazení)

[bijekcia ↔ mohutnosť] **Def** Množiny A, B majú rovnakú mohutnosť ak existuje bijekcia $f: A \to B$.

- ~~M je dobre usporiadaná~~

Pozn
- reflexívna
- symetrická
- tranzitívna

} akási ekvivalencia na množinách

- ~~$\langle 0,1 \rangle$ a $\langle 1,3 \rangle$ majú rovnakú mohutnosť podobne $\langle 0,1 \rangle$ a $(0,1)$ ...~~

rôznej mohutnosti

$\{1,2,3,4\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}, \emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}, \emptyset\}, \{\emptyset\}, \emptyset\}\}$

$\{a,b,c,d\}$

Príklady:
- $|A| = (n)$ ← konečné množiny
- $|A| = n$, $|B| = m$ potom nemajú rovnakú mohutnosť.
- $\mathbb{N}$ ←
- $\mathbb{Q}$
- $\mathbb{R}$
- $\mathbb{C}$

Dôkaz indukciou 1) $|\emptyset| \neq |\{1\}|$

2) ak $|A| \neq |B|$ potom $|A+1| \neq |B+1|$.

ČO SA TU MYSLÍ ?

V zmysle definície – neexistuje bijekcia

(Zopakovanie: lineárne usporiadaná & každá neprázdna má najmenší prvok – ... usporiadaná.

Tvrdenie konečné množiny sú dobre usporiadané. (Indukciou) (resp. každá konečná podmnožina má max. min)

Tvrdenie $\mathbb{N}$ je dobre usporiadaná množina.

Dôkaz

Nech $M \subset \mathbb{N}$. a M je neprázdna. Potom:

$\{1, ..., m\}$ – je konečná – t.j. dobre usporiadaná.

$\{1,2,3,\dots,m\} \cap M \neq 0$ má najmenší prvok. Ten bude zároveň najmenším prvkom M.

TOTO SOM UPRAVIL 20.11

Def $f: \mathbb{N} \to A$ sa nazýva postupnosť s hodnotami v A. $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$

$f: \{1,2,\dots,n\} \to A$ konečná postupnosť s hodnotami v A.

Def Množina A sa nazýva nekonečne spočítateľná ak má rovnakú mohutnosť ako $\mathbb{N}$. t.j. existuje bijekcia $f: \mathbb{N} \to A$ (prostá postupnosť).

- Množina A sa nazýva spočítateľná ak je konečná, alebo nek. spoč.

- Množina A sa nazýva nespočítateľná ak nie je spočítateľná.

(podiaľ ... 20.11)

Veta $(0,1)$ nie je spočítateľná množina.

Dôkaz
- každé číslo z $(0,1)$ sa dá reprezentovať ~~binárnou~~ ~~desiatkovou~~ dekadickou postupnosťou:

$$x < 0.1 \Rightarrow a_0 = 0 \qquad 0.1 \leq x \leq 0.2 \; a_0 = 1 \text{ atď.}$$

$f: \mathbb{N} \to \{0,1\}$ $\{0,1,2,\dots\}$

- pre dve rôzne x_1 a x_2 existuje ~~nejaká~~ pozícia, kde sa líšia.
(k je najmenšie také)

~~potom ... postupnosti ... x_1 ak ... na ... mieste.~~

rovnako,

- každej postupnosti zodpovedá nejaké $x \in (0,1)$.

↳ je to bijekcia medzi $(0,1)$ a ~~postupnosťami~~ (nekonečnými) dekadickými postupnosťami.

problém s: $\frac{1000000}{0.99999}$

upresnenie nekonečné

- Množina všetkých (nekonečných) dekadických postupností je nespočítateľná.

potiaľto → Sporom. Nech je spočítateľná: $\exists\ c: \mathbb{N} \to M$ bijekcia

c_0	c_{00}	c_{01}	c_{02}	c_{03}
c_1	c_{10}	c_{11}	c_{12}	c_{13}
c_2	c_{20}	c_{21}	c_{22}	c_{23}
c_3	- - - - -			

zoberme nasledujúcu postupnosť:

$c_{kk} = 1 \to b_k = 9.$

$c_{kk} \neq 1 \to b_k = 1$

Potom postupnosť ... nenachádza ... v ta... ~~...~~ ...
(ak $c_n = 0{,}b_0 b_1 \dots$ ... $c_{nn} \neq b_n$ SPOR)
a zároveň $0{,}b_0 b_1 \dots$ reprezentuje nejaké číslo z $(0,1)$.
s predpokladom bijekcie.

Pozn. Podobný ~~dôkaz~~ myšlienka (diagonálny princíp) sa dá použiť na dôkaz že množina nek. postupností je nespočítateľná $f: \mathbb{N} \to$

príklad • ak je A (neprázdna) spočítateľná (konečná al. nekonečná), potom existuje postupnosť $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, ktorá ide cez všetky prvky (nie nutne inj.) $f: \mathbb{N} \to A$
(Dá sa ~~tiež~~ ukázať aj opačné ~~tvrdenie~~ — t.j. ak ~~sa dajú~~ prvky ~~zoradiť~~ postupnosť prechádza cez ∀ d $\Rightarrow$ mn. je spočítateľná)

~~Tvrdenia~~ Veta • každá podmnožina spočítateľnej množiny je spočítateľná.

• A, B sú spočítateľné $\Rightarrow A \cup B$ je spočítateľná

• Množina A je spočítateľná, ak jej prvky sa dajú zoradiť do postupnosti (nie nevyhnutne injektívnej) (Teda existuje surjektívne: $f: \mathbb{N} \to A$)

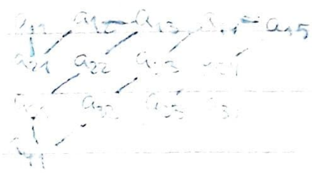
(Dôkaz: $A \cup B$ $A = a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ $B = b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$

$A \cup B = a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$

•

• spočítateľné zjednotenie A_i : $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ je spočítateľné.

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = a_{11}\ a_{21}\ a_{12}\ a_{31}\ a_{22}\ a_{13}$



Tvrdenie A, B sú spočítateľné $\Rightarrow A \times B$ je spočítateľná

Dôk. $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$, $B = \{b_0, b_1, b_2, \dots\}$

$A \times B = \begin{cases} (a_0, b_0)\ (a_0, b_1)\ (a_0, b_2) \\ (a_1, b_0)\ (a_1, b_1)\ (a_1, b_2) \\ (a_2, b_0) \\ (a_3, b_0) \end{cases}$

Príklad ~~Tvrdenie~~ Množina $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ a $\mathbb{N} - \{1, 2, 3, \dots, \infty\}$ majú rovnakú mohutnosť.
$\rightarrow$ nájdeme bijekciu.

Príklad Množina $\mathbb{Q}$ — je spočítateľná

Príklad Mohutnosť $(0, 1)$ a ~~(2, 4)~~ $(-\infty, \infty)$ $\rightarrow$ bijekcia ($\operatorname{tg}((x - \frac{1}{2})\pi)$)
$(0, 1)$ a $\langle 0, 1 \rangle$. ?

existujú injekcie oboma smermi. Stačí to na existenciu bijekcie?

→ Hej, ukážeme neskôr (Cantor-Bernsteinova veta)

- Definícia kardinálneho čísla

Def ak A,B majú rovnakú mohutnosť, hovoríme že reprezentujú to isté kardinálne číslo.

ozn. $|A|=|B|$ alebo $\text{card}(A)=\text{card}(B)$

- pre konečné množiny: $n \in \mathbb{N}$
- pre nekonečné spočítateľné - $\mathbb{N}$ alebo $\aleph_0$
- pre $\mathbb{R}$ je to $2^{\aleph_0}=C$ (mohutnosť kontinua)

V Y N E CH A N É

Def operácie s kardinálnymi číslami:

Nech m,n sú kardinálne čísla (nie nutne konečné). Nech $|A|=m$, $|B|=n$ a tieto množiny majú prázdny prienik. ($A \cap B = \emptyset$).

Potom: $|A \cup B| = m+n$

$|A \times B| = m \times n$

| zobrazenia z B do A | $= m^n$

Urobené: 4.12.

Korektnosť definície súčtu:

Ak $|A|=|A'|$, $|B|=|B'|$ ... $|A' \cap B'| = \emptyset$

potom: $f: A \to A'$, $g: B \to B'$

$h = f \cup g$: $A \cup B \to A' \cup B'$ ... bijekcia

Usporiadanie kardinálnych čísel:

$|A|=m$, $|B|=n$, definujeme ... $\exists$ injekcia z A

- Veta (Cantor-Bernstein)

~~Ak m,n sú kardinálne čísla a $m \leq n$ a $n \leq m$ $\Rightarrow m = n$~~

(alebo: ak existuje injekcia $f: A \to B$ a existuje injekcia $g: B \to A$

$\Rightarrow$ existuje bijekcia $h: A \to B$