Príklad • ak je A (neprázdna) spočítateľná (konečná al. nekonečná), potom existuje postupnosť $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, ktorá ide cez všetky prvky (nie nutne inj.) $f: N \to A$

(Dá sa tiež ukázať aj opačné tvrdenie — t.j. ak sa dajú prvky zoradiť do postupnosti (postupnosť prechádza cez ∀) → mn. je spočítateľná!

Tvrdenia • každá podmnožina spočítateľnej množiny je spočítateľná.

• A,B sú spočítateľné ⇒ $A \cup B$ je spočítateľná

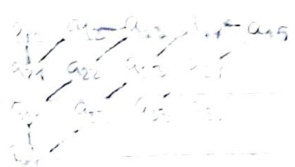
• Množina A je spočítateľná, ak jej prvky sa dajú zoradiť do postupnosti (nie nevyhnutne injektívnej) (Teda existuje surjektívne $f: \mathbb{N} \to A$)

(Dôkaz: $A \cup B$ $A = a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ $B = b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$

$A \cup B = a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$

• spočítateľné zjednotenie A_i : $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ je spočítateľné.

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = a_{11}\ a_{21}\ a_{12}\ a_{31}\ a_{22}\ a_{13}$



Tvrdenie A,B sú spočítateľné ⇒ $A \times B$ je spočítateľná.

Dk. $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$, $B = \{b_0, b_1, b_2, \dots\}$

$$A \times B = \left\{ \begin{array}{lll} (a_0,b_0) & (a_0,b_1) & (a_0,b_2) \\ (a_1,b_0) & (a_1,b_1) & (a_1,b_2) \\ (a_2,b_0) & & \\ (a_3,b_0) & & \end{array} \right.$$

Príklad Množiny $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots,n,\dots\}$ a $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots,k\}$ majú rovnakú mohutnosť.

→ nájdime bijekciu.

Príklad Množina $\mathbb{Q}$ - je spočítateľná

Príklad Mohutnosť $(0,1)$ a $(2,4)$. $(-\infty,\infty)$ → bijekcia ($tg((x-\frac{1}{2})\frac{\pi}{2})$)

$(0,1)$ a $\langle 0,1 \rangle$. ?

∘ existujú injekcie oboma smermi. Stačí to na existenciu bijekcie?

→ Hej, ukážeme neskôr (Cantor-Bernsteinova veta)

∘ <u>Definícia kardinálneho čísla</u>

<u>Def</u> ak A, B majú rovnakú mohutnosť, hovoríme že reprezentujú to isté <u>kardinálne číslo</u>.

ozn. $|A| = |B|$ alebo $card(A) = card(B)$

∘ pre konečné množiny: $n \in \mathbb{N}$

∘ pre nekonečné spočítateľné – $\mathbb{N}$ alebo $\aleph_0$

∘ pre $\mathbb{R}$ je to $2^{\aleph_0} = C$ (mohutnosť kontinua)

VYNECHANE

[illegible] 4.12.[illegible]

<u>Def</u> operácie s kardinálnymi číslami:

Nech m, n sú kardinálne čísla (nie [illegible] konečné). Keď $|A| = m$, $|B| = n$

a tieto množiny majú prázdny prienik. ($A \cap B = \emptyset$).

Potom: $|A \cup B| = m + n$

$|A \times B| = m \times n$

| zobrazenia z B do A [illegible] – m^n

korektnosť definície súčtu:

Ak $|A| = |A'|$, $|B| = |B'|$ [illegible] $A' \cap B'| = \emptyset$

potom: $f: A \to A'$, $g: B \to B'$

$h = f \cup g$: $A \cup B \to A'$ [illegible] bijekcia

Usporiadanie kardinálnych čísel:

$|A| = m$, $|B| = n$, definujeme [illegible] injekcia z A [illegible]

∘ <u>Veta</u> (Cantor-Bernstein)

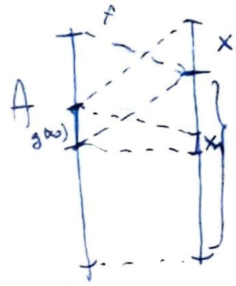
~~Ak m, n sú kardinálne čísla [illegible] $n \leq m$ $\Rightarrow$ $n = m$~~

(alebo: ak existuje injekcia $f: A \to$ [illegible] existuje injekcia $g:$ [illegible]

$\Rightarrow$ existuje bijekcia $h: A \to B$

Důkaz: Nech $X_0 = B - f(A)$.

- Ak $X_0 = \emptyset$, potom je f bijekcia → skončili sme
- Ak $X_0 \neq \emptyset$, f nie je bijekcia a musíme ju f nejako vylepšiť, najlepšie využitím g.



- $Y_0 = g(X_0)$, $X_1 = f(Y_0)$

  atď.

- $Y_n = g(X_n)$, $X_{n+1} = f(Y_n)$.

Potom $A_2 = \bigcup_{n\geq 0}^{\infty} Y_n$, $A_1 = A - A_2$

$B_2 = \bigcup_{n\geq 0}^{\infty} X_n$, $B_1 = B - B_2$.

Potom:
- $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cup A_2 = A$ (jasné...)
- $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $B_1 \cup B_2 = B$
- $\underline{f(A_1) = B_1}$ a $\underline{g(B_2) = A_2}$

~~$x \in A_1$ a existuje $f(A_1)$ ⇒ $\exists n$ že X_n~~

1) Nech $x \in A_1$. Ak $f(x) = y \notin B_1$ musí ... (n ≥ 0)

(f(A_1) ⊆ ...)

potom ale $\exists z \in Y_{n-1} : y = f(z)$.

čiže $\exists x \in A_1$, $f(x) = y$

$\exists z \in Y_{n-1} \subset A_2$ $f(z) = ...$

2) ~~Nech~~ $y \in B_1$. $B - f(A) = X_0 \subseteq B_2 = ...$;

~~Existuje~~ teda ~~existuje~~ $f(A) \supseteq B_1$, ...

$B_1 \subseteq f(A_1)$

Ak by $x \notin A_1$, bolo by $x \in A_2$, čiže ... nejaké n.

Potom ale $y = f(x) \in f(Y_n) = X_{n+1} \subseteq B_2$. ... spor.

Preto $x \in A_1$.

3) Nech $x \in g(B_2)$. Potom existuje ~~...~~ $y \in B_2$: $x = g(y)$

$g(B_2) \subseteq A_2$

existuje n, $y \in X_n$ ⇒ $x = g(y) \in g(X_n) = Y_n \subseteq A_2$

4) Ak $x \in A_2$, potom existuje n, $x \in Y_n$. Potom ale: $x \in Y_n = g(X_n)$

$A_2 \subseteq g(B_2)$ čiže existuje $y \in X_n$, $x = g(y)$, preto $x \in g(B_2)$.

... chceme...

∘ definujme h ako: $h(x) = f(x)$ pre $x \in A_1$
$h(x) = g^{-1}(x)$ pre $x \in A_2$

∘ ľahko sa dá presvedčiť, že h je injekcia a surjekcia.

$\begin{cases} h(A_1) = B_1 \\ h(A_2) = B_2 \end{cases}$ surjekcia

$x_1, x_2 \in A$ $x_1 \neq x_2$ 4. možnosti ....

Skúška : 9.1.06 (2, 2.5 hod.)
Opravné termíny : 16.1.06.

$\boxed{\text{Potiahto}}$

Veta (Cantorova)
Pre ľubovoľnú množinu M platí:
$|M| < |\mathcal{P}(M)|$.

Dôkaz 1) $\varphi : M \to \mathcal{P}(M)$ $\mapsto \{x\}$ je injekcia $\Rightarrow |M| \leq |\mathcal{P}(M)|$

2) sporom. Nech $\exists M$: $|M| = |\mathcal{P}(M)| \Rightarrow \exists$ bijekcia $\varphi : M \to \mathcal{P}(M)$

$x \mapsto A_x \subset M$

dve možnosti: a) $x \in A_x$ b) $x \notin A_x$

uvažujme: $B = \{x \in M ;\ x \notin A_x\} \subset M$.

takáto podmnožina nemá [illegible] neexistuje y, $B = \ldots$

(Diagonálny princíp ....)

Tvrdenie Ak $|M| = m \Rightarrow |\mathcal{P}(M)| = 2^m$

Dôkaz $\psi : P(M) \to \{0,1\}^M$

bijekcia: $A \subseteq M \longleftrightarrow \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$ charakteristická funkcia množiny

$\chi_A^{-1}(\{1\}) \overset{?}{=} A$ $\chi_A^{-1}(\{0\}) \overset{?}{=} A^c$

$\boxed{\text{Sem. } 10.12.14}$

Videli sme: $(0,1) \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $\Rightarrow |(0,1)| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0}$
(postupnosti)
$|(0,1)| = |\mathbb{R}| = c$.