◦ existujú injekcie oboma smermi. Stačí to na existenciu bijekcie?

→ Hej, ukážeme neskôr (Cantor-Bernsteinova veta)

◦ Definícia kardinálneho čísla

Def ak A, B majú rovnakú mohutnosť, hovoríme že reprezentujú to isté kardinálne číslo.

ozn. $|A| = |B|$ alebo $card(A) = card(B)$

◦ pre konečné množiny: $n \in \mathbb{N}$

◦ pre nekonečné spočítateľné – $\mathbb{N}$ alebo $\aleph_0$

◦ pre $\mathbb{R}$ je to $2^{\aleph_0} = c$ (mohutnosť kontinua)

V Y N E C H A N E

Def operácie s kardinálnymi číslami:

Nech m, n sú kardinálne čísla (nie nutne konečné). Nech $|A| = m$, $|B| = n$ a tieto množiny majú prázdny prienik. ($A \cap B = \emptyset$).

Položme: $|A \cup B| = m + n$

$|A \times B| = m \times n$

| zobrazenia z B do A | $= m^n$

Vrobené 4.12.06.

korektnosť definície súčtu:

Ak $|A| = |A'|$, $|B| = |B'|$ ... $A' \cap B' = \emptyset$

položme: $f: A \to A'$, $g: B \to B'$

$h = f \cup g$: $A \cup B \to A' \cup B'$ bijekcia

Usporiadanie kardinálnych čísel:

$|A| = m$, $|B| = n$, definujeme ... $\Rightarrow \exists$ injekcia z A

◦ Veta (Cantor-Bernstein)

~~Ak m, n sú kardinálne čísla a $m \leq n$ a $n \leq m \Rightarrow m = n$~~

(alebo: ak existuje injekcia $f: A \to B$ a existuje injekcia $g: B \to A$

$\Rightarrow$ existuje bijekcia $h: A \to B$

∘ definujme h ako: $h(x) = f(x)$ pre $x \in A_1$
$h(x) = g^{-1}(x)$ pre $x \in A_2$

∘ ľahko sa dá presvedčiť, že h je injekcia a surjekcia.

$\begin{cases} h(A_1) = B_1 \\ h(A_2) = B_2 \end{cases}$ surjekcia

$x_1, x_2 \in A$ $x_1 \neq x_2$ 4. možnosti ....

Skúška: 9.1.06 (2, 2.5 hod.)
Opravné termíny: 17, 1 06.

Potiaľto

Veta (Cantorova)
Pre ľubovoľnú množinu M platí:
$|M| < |\mathcal{P}(M)|$.

Dôkaz 1) $\varphi: M \to \mathcal{P}(M)$ $\mapsto \{x\}$ je injekcia $\Rightarrow |M| \leq |\mathcal{P}(M)|$

2) sporom. Nech $\exists M$: $|M| = |\mathcal{P}(M)| \Rightarrow \exists$ bijekcia $\varphi: M \to \mathcal{P}(M)$

$x \mapsto A_x \subset M$

dve možnosti: a) $x \in A_x$ b) $x \notin A_x$

uvažujme: $B = \{x \in M;\ x \notin A_x\} \subset M$.

takáto podmnožina nemá ... neexistuje y, $B = \ldots$

(Diagonálny princíp ....)

Tvrdenie Ak $|M| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(M)| = 2^n$

Dôkaz $\psi: P(M) \to \{0,1\}^M$

bijekcia: $A \subseteq M \leftrightarrow \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$ cha... funk... množ...

$\chi_A^{-1}(\{1\}) \overset{?}{=} A$ $\chi_A^{-1}(\{0\}) \overset{?}{=} A^c$.

Sem 10.12.14

Videli sme: $(0,1) \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (postupnosti) $\Rightarrow |(0,1)| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0}$

$|(0,1)| = |\mathbb{R}| = c$.

kardinálne čísla.

~~Veta~~
Tvrdenie Nech p, q, r sú ľubovoľné kardinálne čísla. Potom platí:

a) $p+q = q+p$ a $pq = qp$

b) $(p+q)+r = p+(q+r)$ a $(pq)r = p(qr)$

Dôkaz: a) $|A| = p$, $|B| = q$ a $|A \cap B| = \emptyset$.

potom $p+q = |A \cup B| = |B \cup A| = q+p$

analogicky ostatné.

POKRAČUJE 4.12.2007 SKÚŠKA, OPRAVNÁ PÍSOMKA

Tvrdenie: p, q, r sú kardinálne čísla, potom:

a) $p^q \cdot p^r = p^{(q+r)}$

b) $(p \cdot q)^r = p^r q^r$

c) $(p^q)^r = p^{qr}$

Dôkazy. a) $|A| = p$, $|B| = q$, $|C| = r$ $|B \cap C| = \emptyset$.

$p^q \cdot p^r = |A^B \times A^C| =$

$= |$ zobrazenia $B \to A$ ... enia $C \to A|$

$= [f_1 : B \to A, f_2 : C$ ... $g: B \cup C \to A$

také, že $g|_B =$ ... $g|_A = f_2$.

teda: $= |A^{B \cup C}| = p^{(q+r)}$

b) $|(A \times B)^C| \overset{\text{dokázať}}{=} |A^C \times B^C|$

$f_1 : C \to A$ $c \mapsto f_1(c)$

~~fr~~ $g : C \to A \times B$ $f_2 : C \to B$ $c \mapsto f_2(c)$

$f_1 \times f_2$ ... $c \mapsto [f_1(c), f_2(c)]$

projekcie $\pi_A \circ g : C \to A \times B \to A$

$\pi_B \circ g : C \to A \times B \to B$

c) ~~fh~~ $(A^B)^C$ a $A^{B \times C}$

zobrazenia $C \to A^B$ a zobrazenia $B \times C \to A$

$g(c) = h_1$ priradíme:

$h_1 : B \to A$ $\longrightarrow$ $f(c, b_1) = a_1$

$h(b_1) = a_1$

Tvrdenia

Nech p_1, p_2, p, q, q_1, q_2 sú ľub. kardinálne čísla.

potom:

1) ak $p_1 \leq q_1 \wedge p_2 \leq q_2 \Rightarrow p_1 + p_2 \leq q_1 + q_2$

2) $p_1 \leq q_1 \wedge p_2 \leq q_2 \Rightarrow p_1 \cdot p_2 \leq q_1 q_2$

3) $\forall q \geq 0: \quad p \leq p + q$

4) $\forall q \geq 1: \quad p \leq p \cdot q$

5) $p + p = 2 \cdot p$

6) $p \cdot p = p^2$

7) $p + p \leq p \cdot p \quad \forall p \geq 2$

8) $p \leq p^q \quad \forall q \geq 1$

9) $q \leq p^q \quad \forall p \geq 2$ (v skutočnosti ostrá nerovnosť Cantorova veta)

10) $p_1 \leq p_2 \wedge q_1 \leq q_2 \Rightarrow p_1^{q_1} \leq p_2^{q_2}$.

sem 9.12.08 spraviť dôkazy

Dôkazy: 6) $|A| = p \qquad |A \times A| = |A^2| = |A^{\{0,1\}}|$

zobrazenia z $\{0,1\}$ do A.

$g \in A^{\{0,1\}} \quad : g : \{0,1\} \to A$

$g \mapsto [g(0), g(1)] \in A$

10) *

• Auk... • SKÚŠ... 19.1, 25.1 • ... ...ka 20.12.

príklady: $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ napr.: $\mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$

$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ napr. $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Q}$

$c \cdot c = |\mathbb{C}| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$

použitím nerovností.

$|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = 2^c \leq c^c \leq (2^{\aleph_0})^c = 2^{\aleph_0 \cdot c} \leq 2^{c \cdot c} = 2^c$

Otázka: Existuje množina mohutnosti medzi $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ a $c = |\mathbb{R}|$?

$c = 2^{\aleph_0}$

Negatívna odpoveď n...

• táto otázka bola sformulovaná ako "hypotéza kontínua".