Tvrdenia

Nech p_1, p_2, p, q, q_1, q_2 sú ľub. kardinálne čísla,

potom:

1) ak $p_1 \leq q_1 \wedge p_2 \leq q_2 \Rightarrow p_1 + p_2 \leq q_1 + q_2$
2) $p_1 \leq q_1 \wedge p_2 \leq q_2 \Rightarrow p_1 \cdot p_2 \leq q_1 q_2$
3) $\forall q \geq 0: \quad p \leq p + q$
4) $\forall q \geq 1: \quad p \leq p \cdot q$
5) $p + p = 2 \cdot p$
6) $p \cdot p = p^2$
7) $p + p \leq p \cdot p \quad \forall p \geq 2$
8) $p \leq p^q \quad \forall q \geq 1$
9) $q \leq p^q \quad \forall p \geq 2$ (v skutočnosti – ostrá nerovnosť – Cantorova veta)
10) $p_1 \leq p_2 \wedge q_1 \leq q_2 \Rightarrow p_1^{q_1} \leq p_2^{q_2}$.

sem 9.12.08 spraviť dôkazy $\Rightarrow$

Dôkazy: 6) $|A| = p \qquad |A \times A| = |A^2| = |A^{\{0,1\}}|$

zobrazenia z $\{0,1\}$ do A.

$g \in A^{\{0,1\}} \quad : g: \{0,1\} \to A$

$g \mapsto [g(0), g(1)] \in A$

10)

• Anke...
• SK... 19.1, 25.1
• Op... ...ka 20.12.

príklady: $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ napr. $\mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$

$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ napr. $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Q}$

$c \cdot c = |\mathbb{C}| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$

použitím nerovností.

$|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = \quad 2^c \leq c^c \leq (2^{\aleph_0})^c = 2^{\aleph_0 \cdot c} \leq 2^{c \cdot c} = 2^c$

Otázka: Existuje množina mohutnosti medzi $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ a $c = |\mathbb{R}|$?

$c = 2^{\aleph_0}$

Negatívna odpoveď ...

• táto otázka bola sformulovaná ako "hypotéza kontinua".

: ∄ neexistuje kardinálne číslo p: $\aleph_0 < p < c = 2^{\aleph_0}$

History

1939 Goedel: teória množín s HK je bezosporná

1963 - Cohen: nezávislé od ostatných axióm (Zermelo-Fraenkel) (t.j. bezosporná je teória množín s HK aj jej negáciou

- ako je to so všetkými kardinálnymi číslami ?

~~ako rastú~~ → z

$\aleph_0$, $c = 2^{\aleph_0}$, 2^c , $(2)^{2^c}$ ....

- existuje množina všetkých kardinálnych čísel ?

(nie, lebo

Axiomatizácia Teórie množín

~~Axióma výberu~~ Zermelo-Fraenkel

Podobne ako sme na začiatku semestra definovali jazyk a axiómy výrokovej logiky mohli by sme definovať teóriu množín pomocou systému axióm. (tie udávajú dovolené metódy ako tvoriť množiny)

(ako pomerne jednoduchý model)

Jedna z axióm, ktorá spôsobovala "problémy"

---

prednáška

príklad: Na $\langle 0,1)$ definujeme reláciu ekvivalencie:

$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$.

triedy rozkladu ? $[0] = \mathbb{Q} \cap \langle 0,1)$, $[\sqrt{2}] = \{\sqrt{2} + q \mid q \in \mathbb{Q}\}$

- koľko ich je ?

$\mathcal{T} = \langle 0,1\rangle / \sim$, $|\mathcal{T}| = ?$

ako ukazovať $\leq$?

Dá sa ukázať, že $\aleph_0 < |\mathcal{T}| \leq c$.

(ak by $\aleph_0 = |\mathcal{T}|$ potom $|\langle 0,1)| = \mathcal{T} \times \mathbb{Q}$ — spočítateľné zjednotenie spočítateľných mn.

Dokonca $|\mathcal{T}| = c$.

T.j. existuje bijekcia medzi $\mathcal{T}$ a $\langle 0,1\rangle$....

(príklad 9....)

- Množina transcendentných čísel je nespočítateľná.

→ zaviesť, príklady, ...

→ cez spočítateľnosť koreňov a polynómov.

Axióma výberu

Nech $\mathcal{S}$ je systém neprázdnych ~~navzájom disjunktných~~ množín. Potom existuje taká množina V, že pre každé $A \in \mathcal{S}$ je $V \cap A$ jednoprvková množina.

tu už môžu byť prieniky

[Alternatívne znenie (~~systém reprezentantov~~?)

(*) Nech $\mathcal{S}$ je systém neprázdnych množín. Potom existuje zobrazenie $\varphi : \mathcal{S} \to \bigcup \mathcal{S}$ také, že pre každé $A \in \mathcal{S}$, $\varphi(A) \in A$.

φ sa nazýva selektor)

Príklad: Ak sa dá X dobre usporiadať, potom existuje zobrazenie podľa predchádzajúcej definície. a $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X) - \{\emptyset\}$

(osvieženie pojmu dobré usporiadanie)

Dôkaz: Ak sa dá X dobre usporiadať, v každej $A \subseteq X$ existuje najmenší prvok, a to bude naše $\varphi(A)$. $A \in \mathcal{F}$

$\boxed{\text{formálne: } [A, x] \in \varphi \iff x \in A \wedge (\forall y \in A)(x \leq y)}$

Veta (Zermelova) Ak pre ~~každú~~ množinu $\mathcal{P}(X) - \{\emptyset\}$ existuje zobrazenie (*), potom sa dá X dobre usporiadať.

Dôkaz: Nech φ je požadované zobrazenie $\mathcal{P}(X) - \{\emptyset\} \to X$.

Skonštruujme usporiadanie: Za najmenší prvok zoberme $\varphi(X)$ $(\in X)$.

jeho nasledovník: $\varphi(X - \{\varphi(X)\})$ ...

atď.

Formálne: Nech ~~R~~ $\mathcal{R}$ je množina všetkých binárnych relácií $R \subseteq X \times X$, takých, že:

1) existuje $A \subseteq X$, taká že $R \subseteq A \times A$
2) (A, R) je dobre usporiadaná množina
3) pre každé $x \in A$: $f(X - A_R(x)) = x$

(prvky v A menšie ako x.)

Potom možno ukázať:

a) ak $R_1, R_2 \in \mathcal{R} \Rightarrow R_1 \subseteq R_2$ alebo $R_2 \subseteq R_1$.

b) $\bigcup \mathcal{R} = \{[x,y] \in X \times X \;;\; \exists R \in \mathcal{R} : [x,y] \in R\}$ patrí do $\mathcal{R}$.
c) $X, \bigcup \mathcal{R}$ je dobre usporiadaná množina.

Pozn: Axióma výberu je ekvivalentná tvrdeniu „každá množina sa dá dobre usporiadať."

Iné tvrdenia ekvivalentné axióme výberu:

Zornova lemma

Nech A je čiastočne usporiadaná množina.
Podmnožina $B \subseteq A$, ktorá je lineárne usporiadaná (vieme porovnať každé dva prvky) sa nazýva reťazec.

Zornova lema: Nech $(A, <)$ je čiastočne usporiadaná množina.
Ak každý reťazec v $B \subseteq A$ má v A horné ohraničenie (t.j. existuje $b \in A$ taká, že $x \leq b$ pre všetky $b \in B$), tak množina A má maximálny prvok.

Ako vyzerajú ~~dob~~ konečné ~~nekonečné~~ dobre usporiadané množiny?

$0\,1\,2\,3 \ldots n \qquad = n$

$\mathbb{N} \quad 0\,1\,2\,3 \ldots \qquad = \omega \qquad \leftarrow$ ordinálne čísla

$1\,2\,3\,4 \ldots \quad 0 \qquad = \omega + 1$

$2\,3\,4\,5 \ldots \quad 0\,1 \qquad = \omega + 2$

$\vdots$

$0\,2\,4\,6 \ldots \quad 1\,3\,5\,7 \ldots \qquad = \omega + \omega$

$\vdots$

Aký je vzťah medzi ordinálnymi a kardinálnymi číslami.
Ako porovnať dve ordinálne čísla:

$(A, \leq)$, $(B, \preceq)$ f: bijekcia rešpektujúca usporiadanie

$a \leq b \iff f(a) \preceq f(b)$.