Diskrétna matematika I. – Domáca úloha č. 10

Cvičenia v týždňi 30. novembra 2020
Vzory a obrazy, zopár príkladov ako príprava na písomku, zopár na mohutnosti

---

1. Nech $f : A \to B$ je zobrazenie. Dokážte, že pre ľubovoľné $X, Y \subseteq A$ platí:

$$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y),$$
$$f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y).$$

Pod $f(X)$ tu rozumieme množinu $\{y \in B \mid (\exists x \in X)\, y = f(x)\}$ – *obraz* množiny X, ktorú možno zapísať aj ako $\{f(x) \mid x \in X\}$.

Nájdite zobrazenie f a množiny X, Y tak, aby v poslednej inklúzii neplatila rovnosť.

2. Nech $f : A \to B$ je zobrazenie. Dokážte, že pre ľubovoľné $U, V \subseteq B$ platí:

$$f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V),$$
$$f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V).$$

Tu $f^{-1}(Y)$ označuje množinu $\{x \in A \mid f(x) \in Y\}$ – tzv. *vzor* množiny Y.

3. Zoraďte všetky prvky množiny $\mathbb{Q}$ do prostej postupnosti. (T.j. každé racionálne číslo sa v postupnosti bude nachádzať práve raz).

4. Nájdite bijekciu medzi množinami $(0, 1\rangle \times \langle 0, 1)$ a $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$.

5. Nájdite bijekciu medzi všetkými racionálnymi číslami a nenulovými racionálnymi číslami. Existuje taká bijekcia, ktorá zachováva usporiadanie (t.j. ak $x < y$, potom aj $f(x) < f(y)$)?

6. Nech $A_1, A_2, \ldots$ sú také množiny, že pre každé n máme $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \neq \emptyset$. Môže sa stať že $A_1 \cap A_2 \cap \ldots = \emptyset$?

7. Dokážte, že množina všetkých otvorených intervalov s koncami v racionálnych číslach je spočítateľná.

8. Dokážte, že množina všetkých otvorených intervalov s koncami v reálnych číslach je nespočítateľná.

9. Dokážte, že každý systém navzájom disjunktných otvorených intervalov je spočítateľný.

Bonusový príklad

10. Uvažujme rozklad množiny $(0, 1)$ zodpovedajúci relácii ekvivalencie $\sim\, :\ x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Ukážte, že tried rozkladu je nespočítateľne veľa. Existuje bijekcia medzi množinou tried a $(0, 1)$?