

## Diskrétna matematika I. – Domáca úloha č. 10

Cvičenia v týždni 29. novembra 2021

Vzory a obrazy, zopár príkladov ako príprava na písomku, zopár na mohutnosti

---

1. Nech  $f : A \rightarrow B$  je zobrazenie. Dokážte, že pre ľubovoľné  $X, Y \subseteq A$  platí:

$$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y),$$

$$f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y).$$

Pod  $f(X)$  tu rozumieme množinu  $\{y \in B \mid (\exists x \in X) y = f(x)\}$  – obraz množiny  $X$ , ktorú možno zapísať aj ako  $\{f(x) \mid x \in X\}$ .

Nájdite zobrazenie  $f$  a množiny  $X, Y$  tak, aby v poslednej inklúzii neplatila rovnosť.

2. Nech  $f : A \rightarrow B$  je zobrazenie. Dokážte, že pre ľubovoľné  $U, V \subseteq B$  platí:

$$f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V),$$

$$f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V).$$

Tu  $f^{-1}(Y)$  označuje množinu  $\{x \in A \mid f(x) \in Y\}$  – tzv. *vzor* množiny  $Y$ .

3. Zoraďte všetky prvky množiny  $\mathbb{Q}$  do prostej postupnosti. (T.j. každé racionálne číslo sa v postupnosti bude nachádzať práve raz).

4. Nájdite bijekciu medzi množinami  $(0, 1) \times (0, 1)$  a  $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

5. Nájdite bijekciu medzi všetkými racionálnymi číslami a nenulovými racionálnymi číslami. Existuje taká bijekcia, ktorá zachováva usporiadanie (t.j. ak  $x < y$ , potom aj  $f(x) < f(y)$ )?

6. Nech  $A_1, A_2, \dots$  sú také množiny, že pre každé  $n$  máme  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset$ . Môže sa stať že  $A_1 \cap A_2 \cap \dots = \emptyset$ ?

7. Dokážte, že množina všetkých otvorených intervalov s koncami v racionálnych číslach je spočítateľná.

8. Dokážte, že množina všetkých otvorených intervalov s koncami v reálnych číslach je nespočítateľná.

9. Dokážte, že každý systém navzájom disjunktných otvorených intervalov je spočítateľný.

### Bonusový príklad

10. Uvažujme rozklad množiny  $(0, 1)$  zodpovedajúci relácii ekvivalencie  $\sim : x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ . Ukážte, že tried rozkladu je nespočítateľne veľa. Existuje bijekcia medzi množinou tried a  $(0, 1)$ ?