Skúška z Diskrétnej matematiky I., 12.1.2010

1. *(5 b.)* Nech $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$ sú členy Fibonacciho postupnosti. Ukážte, že platí:

$$nF_1 + (n-1)F_2 + \cdots + 2F_{n-1} + F_n = F_{n+4} - (n+3).$$

2. *(6 b.)* Nech T je splniteľná množina výrokov. Ukážte, že množina výrokov $T \cup \{\neg A\}$ je nesplniteľná práve vtedy, keď výrok A je tautologickým dôsledkom množiny výrokov T ($T \models A$).

3. a) *(5 b.)* Ukážte, že nasledujúca kvantifikovaná formula je tautológia

$$((\exists x)(A(x) \Rightarrow B(x))) \Rightarrow (((\forall x)A(x)) \Rightarrow ((\exists x)B(x))).$$

b) *(5 b.)* Nech $A, B \subseteq \mathcal{U}$ a A^c označuje komplement množiny A vzhľadom na $\mathcal{U}$. Ukážte, že:

$$(A^c \cap B) = (B^c \cap A)^c \Leftrightarrow B = A^c.$$

4. *(5 b.)* Množinu všetkých konečných podmnožín množiny $\mathbb{N}$ označme ako $\mathcal{F}$. Na $\mathcal{F}$ zaveďme reláciu $\sim$ nasledovne: pre $A, B \in \mathcal{F}$ bude $A \sim B$ práve vtedy, keď $|A \cup B| = \max(|A|, |B|)$. Je $\sim$ reláciou ekvivalencie?

5. *(6 b.)* Pre nasledujúce dva výroky rozhodnite a stručne zdôvodnite či sú pravdivé alebo nepravdivé.

a) Ak množiny A a B majú rovnakú mohutnosť a $\phi : A \to B$ je injektívne zobrazenie, potom je ϕ aj surjektívne.

b) Prienik dvoch relácií ekvivalencie (ako podmnožín $A \times A$) je tiež reláciou ekvivalencie.

6. *(6 b.)* Rozhodnite a zdôvodnite, či všetkých nekonečných podmnožín množiny $\mathbb{N}$ je spočítateľne veľa.

7. *(7 b.)* Majme zobrazenie $f : X \to Y$ a množiny $A, B \subseteq Y$ spĺňajúce $A \cap B = \emptyset$. Rozhodnite a zdôvodnite, či potom nutne platí $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$.

8. *(5 b.)* S použitím všeobecných vzťahov medzi kardinálnymi číslami rozhodnite a zdôvodnite, ktoré z kardinálnych čísel $2^{(\aleph_0{}^c)}$ a $2^{(c^{\aleph_0})}$ je väčšie alebo či sa rovnajú.