

Dokážte nasledujúce tvrdenia.

1.  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ .
2.  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ .

Definujme postupnosť prirodzených čísel  $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$  nasledovne:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \quad \text{pre } n \geq 3.$$

(Dostaneme teda postupnosť čísel 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...) Táto postupnosť sa nazýva *Fibonacciho postupnosť*.

3. Dokážte, že každý štvrtý člen vo Fibonacciho postupnosti je deliteľný tromi, t.j.  $3|F_{4n}$ .
4. Dokážte, že pre každé  $n \in \mathbb{N}$  sú čísla  $F_n$  a  $F_{n+1}$  nesúdeliteľné, t.j.  $\text{nsd}(F_n, F_{n+1}) = 1$ .
5. Dokážte nasledovnú formulu pre Fibonacciho číslo  $F_n$ :

$$F_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}.$$

Zistite či sú nasledujúce formuly tautológie:

6.  $p \Rightarrow [(\neg q \wedge q) \Rightarrow r]$ .
7.  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge q) \Leftrightarrow p]$ .
8. Rozhodnite či je nasledujúce tvrdenie pravdivé: „Ján ovláda logiku vtedy a len vtedy, ak nie je pravda, že nie je pravda, že Ján ovláda logiku”.
9. Rozhodnite či je nasledujúce tvrdenie pravdivé: „Ak je prirodzené číslo  $a$  deliteľné tromi, potom z faktu, že  $a$  nie je deliteľné tromi vyplýva, že  $a$  je deliteľné piatimi”.

### Bonusové príklady

10. Zadefinujte logickú spojku *alebo* ( $\vee$ ) pomocou *implikácie* ( $\Rightarrow$ ) a *negácie* ( $\neg$ ).
11. Zadefinujte logickú spojku *a* ( $\wedge$ ) pomocou spojky *alebo* ( $\vee$ ) a *negácie* ( $\neg$ ).
12. Nájdite súčet  $1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = ?$