Diskrétna matematika I. – Domáca úloha č. 2

Cvičenia v týždni 3. októbra 2022

1. Majme v rovine n priamok vo všeobecnej polohe, t.j. žiadne dve z nich nie sú rovnobežné, ani sa žiadne tri z nich nepretínajú v jednom bode. Na koľko častí delia rovinu?

2. Dokážte, že pre členy Fibonacciho postupnosti a pre každé $n, k \in \mathbb{N}$ platí

$$F_{n+k} = F_{k-1}F_n + F_kF_{n+1}.$$

3. Zapíšte formálne výrok „n je najväčšie prirodzené číslo", pričom môžete použiť existenčný a všeobecný kvantifikátor, reláciu *menší* (napr. $p < q$), reláciu rovnosti (napr. $p = q$) a logické spojky.

4. Zapíšte v jazyku predikátovej logiky výrok: „x je nepárne prvočíslo".
V tomto príklade môžete použiť znaky pre operácie sčítania a násobenia, všeobecný a existenčný kvantifikátor, reláciu menší, predikát rovnosti a pod.

5. Dokážte, že iba s pomocou *ekvivalencie* ($\Leftrightarrow$) a *negácie* ($\neg$) nie je možné zadefinovať spojku *alebo* ($\wedge$) ani spojku *a* ($\vee$).

Definícia: Hovoríme, že výroková formula je v *disjunktívnej normálnej forme* ak je disjunkciou (spojka $\vee$) niekoľkých formúl, z ktorých každá je:
I) konjunkciou (spojka $\wedge$) konečne veľa prvotných formúl alebo ich negácií,
II) v žiadnej podformuli sa nevyskytuje súčasne prvotná formula a jej negácia.

Príklad: $(\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c)$ je v disjunktívnej normálnej forme.

6. Nájdite disjunktívnu normálnu formu ekvivalentnú s výrokom $p \wedge [q \vee (\neg p \wedge r)]$.

Definícia: Hovoríme, že formula B je *tautologickým dôsledkom* (množiny) formúl A_1, A_2, $\ldots$, A_n, ak pre každé ohodnotenie v, pre ktoré $v(A_1) \equiv v(A_2) \equiv \cdots \equiv v(A_n) \equiv 1$ platí aj $v(B) \equiv 1$. Skrátene zapisujeme $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$. Všimnúť si: tautológia je tautologickým dôsledkom prázdnej množiny formúl.

7. Ukážte: $(\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow b) \models a \Rightarrow b$.

8. a) Ukážte, že $a \Rightarrow b$ je tautologickým dôsledkom formuly $\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg a$.
b) Ukážte: $(\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow c), (\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg c) \models a \Rightarrow b$.

Bonusové príklady

9. Majme v priestore n rovín vo všeobecnej polohe, t.j. žiadne dve z nich nie sú rovnobežné, každá trojica rovín sa pretne práve v jednom bode a žiadne štyri sa nepretnú v jednom bode. Na koľko častí delia priestor? Ako by to bolo pre $(k-1)$-rozmerné nadroviny v k-rozmernom priestore $\mathbb{R}^k$?

10.* Ukážte, že každý (nie nutne konvexný) n-uholník sa dá rozdeliť na $n-2$ neprekrývajúcich sa trojuholníkov.