

Axiómy a vety výrokovej logiky, ktoré môžete použiť:

$$(A1) \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

$$(V1) \vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

$$(A2) \vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

$$(V2) \vdash \neg\neg A \Rightarrow A$$

$$(A3) \vdash (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

$$(V2') \vdash B \Rightarrow \neg\neg B$$

$$(V0) \vdash A \Rightarrow A$$

$$(V3) \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

1. Postupnosť  $\{a_n\}$  je definovaná predpisom:  $a_{n+1} = 3a_n + 1$  pre  $n \geq 1$  a  $a_1 = 5$ . Ukážte, že  $a_n = \frac{11 \cdot 3^{n-1} - 1}{2}$ .

2. Ukážte, že pre členy Fibonacciho postupnosti  $\{F_n\}$  (t.j.  $F_1 = 1, F_2 = 1$  a  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ) pre  $n \geq 2$  platí:

$$F_n^2 = F_{n+1}F_{n-1} + (-1)^{n+1}.$$

3. Zistite či je formula  $p \vee q$  tautologickým dôsledkom formuly  $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow p$ .

4. Ukážte, že  $\neg(B \Rightarrow A) \vdash B$ . Môžete použiť vyššie uvedené vety a axiómy, modus ponens a vetu o dedukcii.

5. Ukážte, že nasledujúca kvantifikovaná formula je tautológiou alebo nájdite protipríklad:

$$(\forall x)(\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)) \Rightarrow ((\exists x)\Phi(x) \Rightarrow (\forall x)\Psi(x)).$$