Písomka z Diskrétnej matematiky I., 2.12.2009

Hovoríme, že relácia R je:

reflexívna ak $(\forall x)[x,x] \in R$,
antireflexívna ak $(\forall x)[x,x] \notin R$,
symetrická ak $[x,y] \in R \Rightarrow [y,x] \in R$,
antisymetrická ak $([x,y] \in R \wedge [y,x] \in R) \Rightarrow x = y$,
má vlastnosť *dichotómie* ak $(\forall x,y)([x,y] \in R \vee [y,x] \in R)$,
tranzitívna ak $([x,y] \in R \wedge [y,z] \in R) \Rightarrow [x,z] \in R$.

1. Dokážte, že pre ľubovoľné množiny A, B, C platí:
a) $A \cup B = A - B \Leftrightarrow B = \emptyset$,
b) $A - (C \cap B) = (A - C) \cup B \Leftrightarrow ((B \subseteq A) \wedge (A \cap C = \emptyset))$.

2. Koľko existuje relácií na štvorprvkovej množine, ktoré sú antisymetrické a majú vlastnosť dichotómie zároveň?

3. Na množine $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ máme reláciu $\sim$ definovanú predpisom:

$$[x_1, y_1] \sim [x_2, y_2] \Leftrightarrow x_1 y_1 = x_2 y_2.$$

Ukážte, že relácia $\sim$ je reláciou ekvivalencie, zistite ako vyzerajú triedy ekvivalencie pre prvky $[1,1]$ a $[0,0]$, načrtnite obrázok zobrazujúci triedy rozkladu.

4. Zistite či existuje čiastočné usporiadanie päťprvkovej množiny, ktoré má 2 maximálne a jeden najväčší prvok. Ak áno, znázornite pomocou Hesseho diagramu, ak nie zdôvodnite.

5. Majme zobrazenie $f : X \to Y$ a podmnožiny $A, B \subseteq X$. Dokážte, že $f(A) - f(B) \subseteq f(A - B)$. Nájdite príklad, keď nenastane rovnosť. ($f(A)$ je obraz množiny A, t.j. $f(A) = \{z \mid \exists a \in A, f(a) = z\}$).