Diskrétna matematika I. – Domáca úloha č. 4

Cvičenia v týždni 16. októbra 2023

Zopakujme si axiómy výrokovej logiky a tri formule dokázané na prednáške:

(A1) $\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
(A2) $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
(A3) $\vdash (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
(V0) $\vdash A \Rightarrow A$
(V1) $\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
(V2) $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$

Dokážte platnosť nasledujúcich formúl (okrem axióm a pravidla modus ponens môžete použiť aj vetu o dedukcii a formule dokázané na prednáške, resp. v domácej úlohe):

1. (V2') $\vdash B \Rightarrow \neg\neg B$.

2. (V4) $\vdash A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$.

3. (V3) $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$. Pomôcka: ukážte $A \Rightarrow B, \neg\neg A \vdash \neg\neg B$ pomocou (V2) a (V2').

4. $(\neg B \Rightarrow A) \vdash (\neg A \Rightarrow B)$.

5. (V7) $\vdash \neg A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \vee B))$. Pomôcka: použite definíciu $A \vee B :=$ "$\neg A \Rightarrow B$", ukážte $\neg A \vdash (\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ a použite (V3).

6. (V8) $\vdash A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$.

Bonusové príklady

7. $\vdash (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B)$.

8. $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$.

V bonusových príkladoch sa môzu zísť dve vety, ktorých dôkazy sme nestihli spraviť na prednáške, dokážeme ich v stredu, 18. októbra:

Veta o dôkaze rozborom prípadov: Nech $T = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$, A, B, C sú výrokové formule. Potom $T, (A \vee B) \vdash C$ práve vtedy, keď súčasne platí $T, A \vdash C$ aj $T, B \vdash C$.

Pozn. Logická spojka $\vee$, definovaná ako $A \vee B :=$ "$\neg A \Rightarrow B$" nie je "komutatívna", t.j. $A \vee B$ a $B \vee A$ sú rôzne formule, treba si na to dať pozor.

Veta o neutrálnej formuli: Ak $T, A \vdash B$ aj $T, \neg A \vdash B$, potom $T \vdash B$.