Diskrétna matematika I. – Domáca úloha č. 7

Cvičenia v týždni 13. novembra 2023

---

1. Predpokladajme, že $A \subset B$. Ukážte, že potom platí $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

2. Ako vyzerá množina $\emptyset - (\emptyset - A)$?

3. Nech $\mathcal{U} \neq \emptyset$. Pre každú podmnožinu $A \subseteq \mathcal{U}$ označujeme množinu $\mathcal{U} - A$ ako A^{c}. Dokážte nasledujúce identity:
a) $\emptyset^{\mathrm{c}} = \mathcal{U}$.
b) $\mathcal{U}^{\mathrm{c}} = \emptyset$.
c) $(A^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} = A$.
d) $A \cup A^{\mathrm{c}} = \mathcal{U}$.

4. Graficky znázornite vlastnosti relácie inklúzie $\subset$ na potenčnej množine $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$. ($A \subset B$ ak $A \subseteq B$ a $A \neq B$)

5. Majme reláciu $R = \{[a, b], [b, c], [d, e], [d, f]\}$ na množine $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Doplňte R tak, aby z nej vznikla relácia ekvivalencie a aby sme pridali čo najmenší počet usporiadaných dvojíc.

Hovoríme, že relácia R je:
reflexívna ak $(\forall x)\, [x, x] \in R$,
symetrická ak $[x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R$,
tranzitívna ak $([x, y] \in R \wedge [y, z] \in R) \Rightarrow [x, z] \in R$,
antireflexívna ak $(\forall x)\, [x, x] \notin R$,
asymetrická ak $[x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \notin R$,
antisymetrická ak $([x, y] \in R \wedge [y, x] \in R) \Rightarrow x = y$,
má vlastnosť *dichotómie* ak $(\forall x, y)([x, y] \in R \vee [y, x] \in R)$.

Zistite, ktoré z vlastností majú nasledujúce relácie:

6. Relácia R na $\mathbb{Z}$ definovaná $xRy \Leftrightarrow 3|(x - y)$.

7. Relácia R na $\mathbb{Z}$ definovaná $xRy \Leftrightarrow x^2 = y^2$.

8. Relácia R na $\mathbb{Q}$ definovaná $xRy \Leftrightarrow x - y \notin \mathbb{Z}$.

9. Relácia R na $\mathcal{P}(Y)$ definovaná $ARB \Leftrightarrow a \in A \cap B$, kde a je pevne zvolený prvok množiny Y.

Bonusový príklad

10. Majme reláciu $\sim$ na množine komplexných čísel $\mathbb{C}$ danú nasledovne: $z_1 \sim z_2$ práve vtedy, keď $|z_1| = |z_2|$. Overte, že $\sim$ je reláciou ekvivalencie a popíšte tzv. triedy ekvivalencie $\tilde{z}$, t.j. množiny všetkých $z' \in \mathbb{C}$, pre ktoré $z \sim z'$. (Norma komplexného čísla $z = a + b \cdot i$ je daná ako $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.)