

1. Predpokladajme, že  $A \subset B$ . Ukážte, že potom platí  $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$ .
2. Ako vyzerá množina  $\emptyset - (\emptyset - A)$ ?
3. Nech  $\mathcal{U} \neq \emptyset$ . Pre každú podmnožinu  $A \subseteq \mathcal{U}$  označujeme množinu  $\mathcal{U} - A$  ako  $A^c$ . Dokážte nasledujúce identity:
  - a)  $\emptyset^c = \mathcal{U}$ .
  - b)  $\mathcal{U}^c = \emptyset$ .
  - c)  $(A^c)^c = A$ .
  - d)  $A \cup A^c = \mathcal{U}$ .
4. Graficky znázornite vlastnosti relácie inklúzie  $\subset$  na potenčnej množine  $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ . ( $A \subset B$  ak  $A \subseteq B$  a  $A \neq B$ )
5. Majme reláciu  $R = \{[a, b], [b, c], [d, e], [d, f]\}$  na množine  $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ . Doplňte  $R$  tak, aby z nej vznikla relácia ekvivalencie a aby sme pridali čo najmenší počet usporiadaných dvojíc.

Hovoríme, že relácia  $R$  je:

*reflexívna* ak  $(\forall x) [x, x] \in R$ ,

*symetrická* ak  $[x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R$ ,

*tranzitívna* ak  $([x, y] \in R \wedge [y, z] \in R) \Rightarrow [x, z] \in R$ ,

*antireflexívna* ak  $(\forall x) [x, x] \notin R$ ,

*asymetrická* ak  $[x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \notin R$ ,

*antisymetrická* ak  $([x, y] \in R \wedge [y, x] \in R) \Rightarrow x = y$ ,

má vlastnosť *dichotómie* ak  $(\forall x, y)([x, y] \in R \vee [y, x] \in R)$ .

Zistite, ktoré z vlastností majú nasledujúce relácie:

6. Relácia  $R$  na  $\mathbb{Z}$  definovaná  $xRy \Leftrightarrow 3|(x - y)$ .
7. Relácia  $R$  na  $\mathbb{Z}$  definovaná  $xRy \Leftrightarrow x^2 = y^2$ .
8. Relácia  $R$  na  $\mathbb{Q}$  definovaná  $xRy \Leftrightarrow x - y \notin \mathbb{Z}$ .
9. Relácia  $R$  na  $\mathcal{P}(Y)$  definovaná  $ARB \Leftrightarrow a \in A \cap B$ , kde  $a$  je pevne zvolený prvok množiny  $Y$ .

### Bonusový príklad

10. Majme reláciu  $\sim$  na množine komplexných čísel  $\mathbb{C}$  danú nasledovne:  $z_1 \sim z_2$  práve vtedy, keď  $|z_1| = |z_2|$ . Overte, že  $\sim$  je reláciou ekvivalencie a popíšte tzv. triedy ekvivalencie  $\tilde{z}$ , t.j. množiny všetkých  $z' \in \mathbb{C}$ , pre ktoré  $z \sim z'$ . (Norma komplexného čísla  $z = a + b \cdot i$  je daná ako  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .)