Diskrétna matematika I. – Domáca úloha č. 9

Cvičenia v týždni 2. decembra 2024

---

1. Nech $A = \{a, b, c\}$ a $B = \{x, y\}$. Nájdite nasledujúce zobrazenia (ak existujú):
a) všetky injektívne z A do B, a všetky injektívne z B do A.
b) všetky surjektívne z A do B, a všetky surjektívne z B do A.
c) všetky bijektívne z A do B, a všetky bijektívne z B do A.

2. Vyplýva z toho, že zložené zobrazenie $f \circ g$ je injektívne aj injektivita f? Ako to je s injektivitou g? Čo sa stane ak nahradíme v predchádzajúcich otázkach ,,injektívnosť" pojmom ,,surjektívnosť"?

3. Nech A je konečná množina. Dokážte:
a) Ak $f : A \to A$ je injektívne, tak je aj surjektívne.
b) Ak $f : A \to A$ je surjektívne, tak je aj injektívne.
Platia takéto tvrdenia aj pre nekonečnú množinu (napr. $\mathbb{N}$)?

4. Nech $f : A \to B$ je zobrazenie. Dokážte, že pre ľubovoľné $X, Y \subseteq A$ platí:

$$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y),$$
$$f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y).$$

Pod $f(X)$ tu rozumieme množinu $\{y \in B \mid (\exists x \in X)\, y = f(x)\}$ – *obraz* množiny X, ktorú možno zapísať aj ako $\{f(x) \mid x \in X\}$.

Nájdite zobrazenie f a množiny X, Y tak, aby v poslednej inklúzii neplatila rovnosť.

5. Nájdite bijekciu medzi $\langle 0, 1)$ a $\{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

6. Nech $f : A \to B$ je zobrazenie. Dokážte, že pre ľubovoľné $U, V \subseteq B$ platí:

$$f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V),$$
$$f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V).$$

Tu $f^{-1}(Y)$ označuje množinu $\{x \in A \mid f(x) \in Y\}$ – tzv. *vzor* množiny Y.

7. Nájdite bijekciu medzi intervalmi: $(0, 1)$, $(0, \infty)$.

8. Možinu všetkých zobrazní z X do Y označujeme ako $Y^X = \{f \mid f \text{ je zobrazenie z } X \text{ do } Y\}$. Ukážte, že pre neprázdnu množinu A platí:
a) $A^{\emptyset} = \{\emptyset\}$, b) $\emptyset^A = \emptyset$, c) $\emptyset^{\emptyset} = \{\emptyset\}$.
Návod: Zobrazenie z A do B, ako relácia, t.j. podmnožina kartézskeho súčinu $A \times B$ má spĺňať nejaké vlastnosti. Ukážte, že v prípadoch a) a c) má takéto vlastnosti prázdna množina, v prípade b) taká podmnožina neexistuje.

Bonusové príklady

9. Nájdite bijekciu medzi intervalmi: $(0, 1\rangle$, $(0, 1)$.

10. Nájdite injektívne zobrazenie z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$.