Písomka z Diskrétnej matematiky I., 7.12.2011

Hovoríme, že relácia R je:

reflexívna ak $(\forall x)[x,x] \in R$,
antireflexívna ak $(\forall x)[x,x] \notin R$,
symetrická ak $[x,y] \in R \Rightarrow [y,x] \in R$,
antisymetrická ak $([x,y] \in R \wedge [y,x] \in R) \Rightarrow x = y$,
má vlastnosť *dichotómie* ak $(\forall x, y)([x,y] \in R \vee [y,x] \in R)$,
tranzitívna ak $([x,y] \in R \wedge [y,z] \in R) \Rightarrow [x,z] \in R$.

1. Dokážte, že pre ľubovoľné množiny A, B, C platí:
a) $A - (A - B) = A - B \Leftrightarrow A = \emptyset$,
b) $(A - B) \cup C = A \cup (B - C) \Leftrightarrow B \subseteq C \subseteq A$.

2. Koľko je na n-prvkovej množine relácií, ktoré sú antireflexívne, symetrické aj antisymetrické zároveň?

3. Na množine $(\mathbb{R} - \{0\}) \times (\mathbb{R} - \{0\})$ máme reláciu $\sim$ definovanú predpisom:

$$[x_1, y_1] \sim [x_2, y_2] \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}.$$

Ukážte, že relácia $\sim$ je reláciou ekvivalencie, zistite ako vyzerajú triedy ekvivalencie pre prvky $[1,1]$ a $[1,-1]$, načrtnite obrázok zobrazujúci triedy rozkladu.

4. Čiastočné usporiadanie päťprvkovej množiny, má 1 maximálny a 2 minimálne prvky. Zároveň vieme, že zo všetkých takýchto usporiadaní v ňom máme najväčší počet navzájom neporovnateľných dvojíc. Znázornite takéto usporiadanie pomocou Hasseho diagramu, zdôvodnite.

5. Majme zobrazenie $f : X \to Y$ a podmnožinu $B \subseteq Y$. Dokážte, že $B \supseteq f(f^{-1}(B))$. Nájdite príklad, keď nenastane rovnosť. ($f(A)$ je obraz množiny A, t.j. $f(A) = \{z \in Y \mid \exists\, a \in A, f(a) = z\}$, $f^{-1}(B)$ je vzor množiny B, t.j. $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$)