

1. Nech  $T$  je splniteľná množina formúl. Ukážte, že  $T \models A \Rightarrow B$  práve vtedy, keď  $T \cup \{A\} \models B$ .
2. Nech  $T$  je splniteľná množina formúl. Ukážte, že  $T \cup \{A \vee B\} \models C$  práve vtedy, keď platí súčasne  $T \cup \{A\} \models C$  a  $T \cup \{B\} \models C$ .
3. Nech  $T$  je množina formúl a  $A$  je kontradikciou, t.j.  $A$  je nespĺniteľná. Ukážte, že ak  $T \models A$ , potom je  $T$  tiež nespĺniteľná.
4. Ukážte, že formula  $\neg a$  je dokázateľná z predpokladov  $\{\neg(a \Rightarrow b), \neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg a\}$ , t.j. nájdite jej dôkaz v zmysle definície.
5. Nech  $D$  je ľubovoľná z axióm výrokovej logiky a  $E$  je ľubovoľná formula. Zostrojte dôkaz formule  $E \Rightarrow D$ .
6. Nech  $T$  je množina formúl a  $A, B, C$  sú ľubovoľné formule. Ukážte, že ak  $T \vdash A \Rightarrow B$  a  $T \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$  potom aj  $T \vdash A \Rightarrow C$ . Pomôcka: výjdite z (A2).
7. Zdôvodnite prečo pre formulu  $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)$  nemôže existovať dôkaz. Pomôcka: musí byť každá z formúl tvoriacich dôkaz tautológia?
8. Ukážte, že formula  $a \Rightarrow b$  je dokázateľná z predpokladu  $\{\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg a\}$ . Pomôcka: ukážte, že  $\{\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg a\} \vdash a \Rightarrow (a \Rightarrow b)$  a použite (A2) a vetu z prednášky  
Porovnajte s príkladom č. 8 a) z minulej úlohy.

Definície niektorých pojmov výrokovej logiky:

Hovoríme, že formula  $A$  je *tautologickým dôsledkom* formúl  $P_1, P_2, \dots, P_m$ , ak pre každé ohodnotenie  $v$ , ktoré dáva  $v(P_i) \equiv 1$  pre  $i = 1 \dots m$ , platí aj  $v(A) \equiv 1$ . Zapisujeme  $P_1, P_2, \dots, P_m \models A$ , resp. ak označíme  $T = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ , môžeme písať  $T \models A$ .

Nech  $T = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$  je množina výrokových formúl. Hovoríme, že postupnosť  $B_1, \dots, B_n$  je *dôkazom formule  $A$  z predpokladov  $T$* , ak:

- 1)  $B_n$  je  $A$
- 2) Každé  $B_k$  pre  $k = 1, \dots, n$  je buď axiómou (A1), (A2) alebo (A3), alebo  $B_k$  patrí do  $T$ , alebo je  $B_k$  bezprostredným dôsledkom aplikácie pravidla modus ponens na nejaké dve formule z  $\{B_1, \dots, B_{k-1}\}$ .

Ak existuje dôkaz formule  $A$  z predpokladov  $T = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$  hovoríme, že  $A$  je *dokázateľná z predpokladov  $T$* . Zapisujeme  $T \vdash A$ , resp.  $P_1, P_2, \dots, P_m \vdash A$ .

Axiómy:

- (A1)  $\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
- (A2)  $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
- (A3)  $\vdash (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$