

Zopakujme si axiomy výrokovej logiky a tri formuly dokázané na prednáške:

- (A1) $\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
- (A2) $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
- (A3) $\vdash (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
- (V0) $\vdash A \Rightarrow A$
- (V1) $\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
- (V2) $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$

Dokážte platnosť nasledujúcich formúl (okrem axióm a pravidla modus ponens môžete použiť aj vetu o dedukcii a formuly dokázané na prednáške, resp. v domácej úlohe):

1. (V2') $\vdash B \Rightarrow \neg\neg B$.
2. (V4) $\vdash A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$.
3. (V3) $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$. Pomôcka: ukážte $A \Rightarrow B, \neg\neg A \vdash \neg\neg B$ pomocou (V2) a (V2').
4. $(\neg B \Rightarrow A) \vdash (\neg A \Rightarrow B)$.
5. (V7) $\vdash \neg A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \vee B))$. Pomôcka: použite definíciu $A \vee B := \neg A \Rightarrow B$, ukážte $\neg A \vdash (\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ a použite (V3).
6. (V8) $\vdash A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$.

Bonusové príklady

7. $\vdash (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B)$.
8. $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$.

V bonusových príkladoch sa môžu zísť dve vety, ktoré sme spomenuli na prednáške 15. októbra, ale dôkazy dokončíme až na prednáške 22. októbra:

Veta o dôkaze rozborom prípadov: Nech $T = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$, A, B, C sú výrokové formuly. Potom $T, (A \vee B) \vdash C$ práve vtedy, keď súčasne platí $T, A \vdash C$ aj $T, B \vdash C$.

Pozn. Logická spojka $\vee$, definovaná ako $A \vee B := \neg A \Rightarrow B$ nie je “komutatívna”, t.j. $A \vee B$ a $B \vee A$ sú rôzne formuly, treba si na to dať pozor.

Veta o neutrálnej formuli: Ak $T, A \vdash B$ aj $T, \neg A \vdash B$, potom $T \vdash B$.