

V čiastočne usporiadanej množine A s usporiadaním $\leq$ sa prvok a nazýva *najmenší* ak $(\forall x \in A)a \leq x$. Prvok b sa nazýva *minimálny* ak $(\forall x \in A)(x \leq b \Rightarrow x = b)$. Podobne, prvok c sa nazýva *najväčší* ak $(\forall x \in A)x \leq c$ a prvok d *maximálny* ak $(\forall x \in A)(d \leq x \Rightarrow x = d)$. Pojmy minimálny a najmenší označujú rôzne veci, hlavne pre množiny, ktoré sú usporiadané iba čiastočne.

1. Nájdite čiastočne usporiadanú množinu, ktorá má práve jeden maximálny prvok a nemá najväčší prvok.

2. Dokážte, že v lineárne usporiadanej množine je minimálny prvok aj najmenší.

3. Dokážte, že ak v čiastočne usporiadanej množine existuje najväčší prvok, tak je jediným maximálnym prvkom.

4. Nech $A = \{a, b, c\}$ a $B = \{x, y\}$. Nájdite nasledujúce zobrazenia (ak existujú):

- a) všetky injektívne z A do B , a všetky injektívne z B do A .
- b) všetky surjektívne z A do B , a všetky surjektívne z B do A .
- c) všetky bijektívne z A do B , a všetky bijektívne z B do A .

5. Vyplýva z toho, že zložené zobrazenie $f \circ g$ je injektívne aj injektivita f ? Ako to je s injektivitou g ? Čo sa stane ak nahradíme v predchádzajúcich otázkach „injektivnosť“ pojmom „surjektívnosť“?

6. Nech A je konečná množina. Dokážte:

- a) Ak $f : A \rightarrow A$ je injektívne, tak je aj surjektívne.
 - b) Ak $f : A \rightarrow A$ je surjektívne, tak je aj injektívne.
- Platia takéto tvrdenia aj pre nekonečnú množinu (napr. $\mathbb{N}$)?

7. Nájdite bijekciu medzi $\langle 0, 1 \rangle$ a $\{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

8. Nájdite bijekciu medzi intervalmi: $(0, 1)$, $(0, \infty)$.

9. Množinu všetkých zobrazení z X do Y označujeme ako $Y^X = \{f \mid f \text{ je zobrazenie z } X \text{ do } Y\}$. Ukážte, že pre neprázdnu množinu A platí:

- a) $A^\emptyset = \{\emptyset\}$, b) $\emptyset^A = \emptyset$, c) $\emptyset^\emptyset = \{\emptyset\}$.

Návod: Zobrazenie z A do B , ako relácia, t.j. podmnožina kartézskeho súčinu $A \times B$ má spĺňať nejaké vlastnosti. Ukážte, že v prípadoch a) a c) má takéto vlastnosti prázdna množina, v prípade b) taká podmnožina neexistuje.

Bonusové príklady

10. Nájdite bijekciu medzi intervalmi: $(0, 1)$, $(0, 1)$.

11. Nájdite injektívne zobrazenie z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$.