

Kombinatorika – Úloha č. 1

Termín odovzdania 29. máj 2026, vo formáte pdf cez *Google Classroom* alebo v papierovej podobe

(vLW) bude znamenať odkaz na knižku J. H. van Linta a R. M. Wilsona (druhé vydanie); uvedené bude spravidla číslo príkladu/problému (kapitola.problém), alebo číslo strany, kde sa o danej veci píše. Neočakávajú sa úplne kompletne a perfektné riešenia. Aj čiastkové riešenia s drobnými opomenutiami, logickými medzerami, či neporiadnym zápisom si môžu vyžadovať veľa práce a námahy a môžu dostať plný počet bodov. T.j. nemusíte týmito domácimi úlohami stráviť všetok svoj voľný čas počas nadchádzajúceho semestra. Na druhej strane, očakáva sa preukázanie výraznejších snáh, aby domáce úlohy splnili svoj účel – naučiť sa, resp. samostatne objaviť niečo netriviálne z preberaného materiálu.

Vždy je tu možnosť absolvovania konzultácií. Tiež môže pomôcť preskúvanie viacerých príkladov daného fenoménu pri hľadaní dôkazu všeobecného tvrdenia. Akceptované budú aj riešenia založené na počítačových simuláciách, pokiaľ budú primerane zdôvodnené a bude to v danom kontexte dávať zmysel.

Skúste vyriešiť primerané množstvo príkladov, t.j. neočakáva sa odovzdanie všetkých riešení.

1. (4 body) Určite limitu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{počet značkových stromov rádu } n}{\text{počet neizomorfných grafov rádu } n}$$

Svoju odpoveď primerane zdôvodnite.

2. (8 bodov) a) Nájdite/popíšte všetky grafy, ku ktorým existuje práve jeden (vrcholovo) značkovaný graf.

b) Nájdite/popíšte všetky grafy, ku ktorým existujú práve dva (vrcholovo) značkované grafy.

c) Nájdite/popíšte všetky grafy rádu n , ku ktorým existuje práve $n!$ (vrcholovo) značkovaných grafov. V každom z prípadov primerane zdôvodnite.

3. (8 bodov) Stručne, vysvetlite hlavné myšlienky dôkazu Vety 2.1 používajúceho Prüferove kódy a vyriešte Problém 2.B.

4. (8 bodov) Stručne, vysvetlite hlavné myšlienky dôkazu č. 2 Vety 2.1 a následne vysvetlite, v čom spočíva náročnosť Problému 2.C.

5. (8 bodov) Vyriešte Problém 2.D.

6. (8 bodov) Skonstruujte nekonečnú triedu grafov $\{\Gamma_n\}$, z ktorých žiaden nie je kompletným grafom s vlastnosťou $\chi(\Gamma_i) = \Delta(\Gamma_i)$ pre všetky i , kde $\Delta(\Gamma_i)$ označuje najvyšší stupeň vrchola v grafe Γ_i .

7. (8 bodov) Vyriešte Problém 3.A.

8. (6 bodov) Stručne, vysvetlite hlavné myšlienky dôkazu č. 2 Vety 3.1.

9. (10 bodov) Určite minimálny počet Δ_7 monochromatických trojuholníkov v ľubovoľnom červeno-modrom ofarbení K_7 . Určite všetky možné počty monochromatických trojuholníkov v nejakom červeno-modrom ofarbení K_7 (t.j. Δ_7 je najmenšie číslo v tomto zozname, aké sú ďalšie možnosti?). Svoju odpoveď primerane zdôvodnite.

10. (8 bodov) Vyriešte Problém 3.C.

11. (8 bodov) Vyriešte Problém 3.D.

12. (8 bodov) Preskúmajte (v literatúre) ako boli určené čísla $N(3, 6; 2)$, $N(3, 7; 2)$, $N(3, 8; 2)$, $N(3, 9; 2)$ a $N(4, 5; 2)$. Tiež skúste zistiť, či od času publikácie knižky (vLW) pribudli nejaké nové známe hodnoty.

13. (10 bodov) Ukážte, že k -regulárny graf s nepárnym obvodom g musí obsahovať aspoň $\frac{k(k-1)^{(g-1)/2}-2}{2(k-2)}$ hrán.

14. (10 bodov) Vyriešte Problém 4.B.

15. (10 bodov) Vyriešte Problém 4.C.

16. (15 bodov) Ukážte, že množina hrán bipartitného k -regulárneho grafu sa dá rozložiť na k navzájom disjunktných párovaní.

a) Platí tvrdenie, keď sa nepožaduje bipartitnosť?

b) Platí tvrdenie, keď budeme navyše požadovať, aby zjednotenie ľubovoľných dvoch disjunktných párovaní tvorilo cyklus (t.j. *súvislý* graf, v ktorom majú všetky vrcholy stupeň 2)?