

Kombinatorika – Úloha č. 2

Termín odovzdania 5. jún 2026, vo formáte pdf cez *Google Classroom* alebo v papierovej podobe

(vLW) bude znamenať odkaz na knižku J. H. van Linta a R. M. Wilsona (druhé vydanie); uvedené bude spravidla číslo príkladu/problému (kapitola.problém), alebo číslo strany, kde sa o danej veci píše. Neočakávajú sa úplne kompletne a perfektné riešenia. Aj čiastkové riešenia s drobnými opomenutiami, logickými medzerami, či neporiadnym zápisom si môžu vyžadovať veľa práce a námahy a môžu dostať plný počet bodov. T.j. nemusíte týmito domácimi úlohami stráviť všetok svoj voľný čas počas nadchádzajúceho semestra. Na druhej strane, očakáva sa preukázanie výraznejších snáh, aby domáce úlohy splnili svoj účel – naučiť sa, resp. samostatne objaviť niečo netriviálne z preberaného materiálu.

Vždy je tu možnosť absolvovania konzultácií. Tiež môže pomôcť preskúmanie viacerých príkladov daného fenoménu pri hľadaní dôkazu všeobecného tvrdenia. Akceptované budú aj riešenia založené na počítačových simuláciách, pokiaľ budú primerane zdôvodnené a bude to v danom kontexte dávať zmysel.

Skúste vyriešiť primerané množstvo príkladov, t.j. neočakáva sa odovzdanie všetkých riešení.

1. (10 bodov) Vyriešte Problém 5.B.
2. (10 bodov) Vyriešte Problém 5.D.
3. (10 bodov) Vyriešte Problém 5.E.
4. (10 bodov) Vyriešte Problém 5.F.
5. (10 bodov) Vyriešte Problém 6.A. použitím Dilworthovej vety.
6. (15 bodov) Vyriešte Problém 6.B a nájdite obdobný výsledok pre podmnožiny s vlastnosťou, že prienik ľubovoľných dvoch je jednoprvkový.
7. (10 bodov) Nájdite a dokážte analóg Vety 6.4., v ktorom sa uvažujú k -prvkové podmnožiny, pre ktoré je prienik každej dvojice jednoprvkový.
8. (10 bodov) Vyriešte Problém 6.C.
9. (10 bodov) a) Charakterizujte transportačné siete, v ktorých je veľkosť maximálneho toku rovná súčtu kapacít hrán vychádzajúcich zo zdroja.
b) Charakterizujte transportačné siete, v ktorých je veľkosť maximálneho toku rovná súčtu kapacít hrán vchádzajúcich do výtoku.
10. (10 bodov) Vyriešte Problém 7.D.
11. (10 bodov) Vyriešte Problém 7.F.
12. (10 bodov) Napíšte krátky súhrn Kapitoly 9 po Vetu 9.1 (vrátane).
13. (10 bodov) Nájdite (zaujímavý) problém, ktorý sa dá riešiť pomocou princípu inklúzie/exklúzie a nie je uvedený v knižke. Opíšte problém a jeho riešenie, prípadne poskytnite kombinatorickú interpretáciu.
14. (10 bodov) Vyriešte Problém 10.C.
15. (10 bodov) Vyriešte Problém 10.D. (bez analytických detailov, t.j. nemusíte dokazovať, že príslušné operácie s radmi sú vďaka ich absolútnej konvergencii pre $\operatorname{Re}(s) > 1$ korektné)
16. (10 bodov) Vyriešte Problém 10.E.

17. (10 bodov) Nech $f(n)$ a $g(n)$ sú funkcie definované pre každé prirodzené číslo n , spĺňajúce pre všetky $n \in \mathbb{N}$ rovnosť

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d).$$

a) Dokážte alebo vyvráťte, že f je *multiplikatívna* práve vtedy, keď je taká aj g (pre potreby tohto príkladu je funkcia f multiplikatívna, ak $f(mn) = f(m)f(n)$, pre všetky dvojice $m, n \in \mathbb{N}$).

b) Dokážte alebo vyvráťte, že f je *multiplikatívna vzhľadom na nesúdeliteľné súčinitele* práve vtedy, keď je taká aj g (pre potreby tohto príkladu je funkcia f multiplikatívna vzhľadom na nesúdeliteľné súčinitele, ak $f(mn) = f(m)f(n)$, pre všetky nesúdeliteľné dvojice $m, n \in \mathbb{N}$).

18. (5 bodov) Vyriešte Problém 13.A.

19. (5 bodov) Vyriešte Problém 13.B.

20. (5 bodov) Vyriešte Problém 13.C.

21. (8 bodov) Vyriešte Problém 13.D.

22. (8 bodov) Dokážte, že počet vektorových podpriestorov dimenzie k vektorového priestoru dimenzie n nad poľom $\mathbb{F}_q$ je $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$.