Lineárna algebra a geometria I. – Domáca úloha č. 1

Cvičenia v týždni 24. septembra 2007

---

1. (1.2.8) Zdôvodnite prečo je systém

$$\begin{aligned} u+\ v+\ w &= 2 \\ u+2v+3w &= 1 \\ v+2w &= 0 \end{aligned}$$

singulárny, nájdite lineárnu kombináciu týchto troch rovníc, ktorá sa vysčíta do rovnosti $0 = 1$. Akou hodnotou musíme nahradiť nulu v poslednom riadku na pravej strane, aby sústava mala riešenie? Ako vyzerá také riešenie?

2. (1.2.11) Sústava rovníc

$$\begin{aligned} ax+2y &= 0 \\ 2x+ay &= 0 \end{aligned}$$

má vždy riešenie $x = y = 0$. Pre akú hodnotu parametra a máme celú priamku riešení?

3. (1.3.2) Pre systém

$$\begin{aligned} u+\ v+\ w &= 2 \\ u+3v+3w &= 0 \\ u+3v+5w &= 2 \end{aligned}$$

postupnou elimináciou nájdite príslušný trojuholníkový systém a jeho riešenie.

4. (1.3.4) Použite eliminačnú metódu pre systém

$$\begin{aligned} u+\ v+w &= -2 \\ 3u+3v-w &= 6 \\ u-\ v+w &= -1. \end{aligned}$$

Ak sa počas eliminácie vyskytne nula na pozícii pivota, vymeňte príslušnú rovnicu s nasledujúcou a pokračujte v eliminácii ďalej. Aká hodnota koeficientu pri neznámej v v poslednej rovnici, namiesto súčasnej -1, by znemožnila pokračovať v eliminácii, a teda spôsobila zlyhanie eliminačného algoritmu?

5. (1.3.11) Použite elimináciu na nájdenie riešení systémov

$$\begin{aligned} u+\ v+\ w &= 6 \\ u+2v+2w &= 11 \\ 2u+3v-\ 4v &= 3 \end{aligned} \qquad \text{a} \qquad \begin{aligned} u+\ v+\ w &= 7 \\ u+2v+2w &= 10 \\ 2u+3v-4w &= 3. \end{aligned}$$

Nasledujúce dve cvičenia predstavujú cvičenia na zostavovanie rovníc. Predpokladajme, že

(a) 80 percent z tých, čo bývajú v Kalifornii na začiatku roka tam býva aj na konci, zvyšných 20 percent sa počas roka odsťahuje preč.

(b) 90 percent z tých, čo začnú rok mimo Kalifornie aj mimo Kalifornie zostane, zvyšných 10 percent sa počas roka do Kalifornie prisťahuje.

Ak poznáme situáciu na začiatku, povedzme 200 miliónov mimo a 30 miliónov v Kalifornii, potom je jednoduché nájsť čísla u a v zodpovedajúce počtom v Kalifornii a mimo na konci roka:

$$\begin{aligned} 0,1(200\,000\,000)+0,8(30\,000\,000) &= u \\ 0,9(200\,000\,000)+0,2(30\,000\,000) &= v \end{aligned}$$

Problémom však zostáva spätný výpočet, t.j. vypočítať začiatočné podmienky z koncových.

6. (1.3.12) Ak $u = 200$ miliónov a $v = 30$ miliónov na konci roka, nájdite rovnice pre príslušné počty na začiatku.

7. (1.3.13) Ak sú u a v na konci roka ako rovnaké ako u a v na začiatku, ako vyzerajú príslušné rovnice? Aký je pomer medzi u a v v takomto "stabilnom stave"?

8. (1.4.1) Vypočítajte súčiny

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Okrem toho do súradnicovej sústavy vyznačte polohové vektory bodov $x = 2$, $y = 1$ a $x = 0$, $y = 3$. Graficky znázornite súčet týchto vektorov a porovnajte s výsledkom tretieho súčinu, vysvetlite.

9. (1.4.3) Nájdite skalárne a maticové súčiny

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prvý z nich udáva dĺžku vektora (na druhú).

10. (1.4.10) Ak označíme zložky matice A ako a_{ij}, vyjadrite v tejto symbolike
(i) prvý pivot,
(ii) násobok l_i prvého riadku, ktorý musíme v eliminácii odčítať od i-teho riadku,
(iii) novú hodnotu, ktorá nahradí hodnotu a_{ij} po tomto odčítaní,
(iv) hodnotu druhého pivota.

11. (1.4.11) Pravda/Nepravda. Ukážte konkrétny protipríklad ak je tvrdenie nepravdivé.
(i) Ak sú prvý a tretí stĺpec matice B rovnaké, potom sú rovnaké aj prvý a tretí stĺpec súčinu AB.
(ii) Ak sú prvý a tretí riadok matice B rovnaké, potom sú rovnaké aj prvý a tretí riadok súčinu AB.
(iii) Ak sú prvý a tretí riadok matice A rovnaké, potom sú rovnaké aj prvý a tretí riadok súčinu AB.
(iv) $(AB)^2 = A^2B^2$.

12. (1.4.14) Metódou pokusov a omylov s maticami typu 2×2 nájdite príklady matíc, ktoré spĺňajú:
(i) $A^2 = -I$, A má reálne zložky,
(ii) $B^2 = 0$, ale $B \neq 0$,
(iii) $CD = -DC$, pritom $CD \neq 0$,
(iv) $EF = 0$, pričom žiadna zo zložiek E a F nie je nulová.

13. (1.4.22) Matice, ktoré popisujú rotáciu roviny x-y majú tvar

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

a) Overte, že $A(\theta_1)A(\theta_2) = A(\theta_1\theta_2)$, použijúc súčtové vzorce pre sínus a kosínus.
b) Čo dostaneme súčinom $A(\theta)$ a $A(-\theta)$?

14. (1.4.23) Pre matice

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{a} \qquad C = AB = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

nájdite mocniny A^2, A^3, $\ldots$, B^2, B^3, $\ldots$ a C^2, C^3, $\ldots$