

1. (1.5.5) Nájdite  $LU$  rozklad pre maticu  $A$ , ako aj lineárny systém  $Ux = c$  v hornom trojuholníkovom tvare, ktorý vznikne elimináciou pre

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

2. (1.5.15) Nájdite rozklady  $PA = LDU$  (a skontrolujte ich) pre

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. (1.5.18) Rozhodnite či sú nasledujúce systémy singulárne alebo regulárne, či nemajú ani jedno, práve jedno alebo nekonečne veľa riešení:

$$\begin{array}{ccc} v-w=2 & v-w=0 & v+w=1 \\ u-v=2, & u-v=0 & \text{a} \quad u+v=1, \\ u-w=2 & u-w=0 & u+w=1 \end{array}$$

4. (1.6.4) (a) Ak je  $A$  invertibilná matica a  $AB = AC$ , dokažte, že  $B = C$ .

(b) Pre  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  nájdite matice  $B$  a  $C$ , pre ktoré  $AB = AC$  ale  $B \neq C$ .

5. (1.6.6) Nájdite inverzné matice k maticiam

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. (1.6.9) Pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

eliminácia zlyhá. Ukážte, že k takejto matici neexistuje inverzná. Tretí riadok inverznej matice  $A^{-1}$  násobený maticou  $A$  by mal dať tretí riadok súčiny  $A^{-1}A = I$ . Prečo je to nemožné?

7. (1.6.14) Ukážte, že (aj) pre obdĺžnikové matice sú matice  $AA^T$  a  $A^T A$  vždy symetrické. Ukážte na príklade, že sa tieto matice nemusia rovnať, a to ani pre štvorcové matice.

8. (1.6.16) (a) Koľko je navzájom nezávislých zložiek v symetrickej matici typu  $n \times n$ ?

(b) Koľko je navzájom nezávislých zložiek v antisymetrickej matici typu  $n \times n$ ?

9. (1.6.17) (a) Ak v rozklade  $A = LDU$  máme na diagonálach trojuholníkových matíc  $L$  a  $U$  jednotky, ako bude vyzeráť rozklad matice  $A^T$ ? Všimnite si, že matice  $A$  a  $A^T$  (v prípade, že počas eliminácie nedochádza k výmene riadkov) majú rovnaké vedúce prvky.

(b) Ako vyzerá vyzerá systém v hornom trojuholníkovom tvare pre  $A^T y = b$ ?

10. (1.6.23) Nech  $A$  a  $B$  sú štvorcové matice. Ukážte, že  $I - AB$  je invertibilná práve vtedy, keď  $I - BA$  je invertibilná. Vydajte z rovnosti  $B(I - AB) = (I - BA)B$ . Venujte špeciálnu pozornosť prípadu, keď je matica  $B$  singulárna.