

1. (2.3.2 b,c) Rozhodnite či sú nasledujúce vektory lineárne závislé alebo nezávislé:
 b) $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4 - v_1$ pre ľubovoľné vektory v_1, v_2, v_3 a v_4 ,
 c) $(1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1)$ a (x, y, z) , kde x, y a z sú ľubovoľné reálne čísla.
2. (2.3.4) Je pravda, že ak sú vektory v_1, v_2 a v_3 lineárne nezávislé, potom sú aj vektory $w_1 = v_1 + v_2, w_2 = v_1 + v_3$ a $w_3 = v_2 + v_3$ lineárne nezávislé? *Pomôcka:* Predpokladajte $c_1w_1 + c_2w_2 + c_3w_3 = 0$ a nájdite vhodné c_i .

3. (2.3.13) Nájdite dimenzie priestorov:
 a) priestor vektorov v \mathbb{R}^4 , ktorých zložky v súčte dávajú nulu,
 b) nulový priestor (jadro) identickej matice typu 4×4 ,
 c) priestor všetkých matíc typu 4×4 ,
 d) priestor všetkých antisymetrických matíc typu 4×4 .

4. (2.3.15) Predpokladajme, že priestor V má dimenziu k . Ukážte, že
 a) ľubovoľných k lineárne nezávislých vektorov vo V tvorí jeho bázu,
 b) ľubovoľných k vektorov, ktoré generujú celé V tvorí jeho bázu.

5. (2.3.17) Ukážte, že ak V a W sú trojrozmerné podpriestory priestoru \mathbb{R}^5 , potom existuje nenulový vektor patriaci do V aj W , teda $V \cap W \neq \{0\}$.

6. (2.3.20) a) V priestore matíc typu 2×2 nájdite bázu podpriestoru P – matíc, pre ktoré sa súčty zložiek v riadkoch aj stĺpcoch rovnajú. Teda

$$P = \left\{ \left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right] \mid a + b = c + d = a + c = b + d \right\}.$$

b) Nájdite päť lineárne nezávislých matíc typu 3×3 s touto vlastnosťou.

7. (2.3.18, 2.3.22, 2.4.21) Pravda/nepravda. Zdôvodnite.
 a) Ak sú stĺpce matice A lineárne nezávislé, potom má systém $Ax = b$ práve jedno riešenie pre každé b .
 b) Matica typu 5×7 nikdy nemôže mať lineárne nezávislé stĺpce.
 c) Každá báza podpriestoru W sa dá rozšíriť na bázu priestoru V . (predpokladajme $\dim W \neq \dim V$)
 d) Každá báza priestoru V sa dá zredukovať na bázu podpriestoru W . (opäť $\dim W \neq \dim V$)
 e) Ak sú štyri základné podpriestory matice A rovnaké ako tie pre maticu B , potom $A = B$.

8. (2.4.3) a) Nájdite dimenzie a bázy pre všetky štyri základné podpriestory pre matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. (2.4.6) Ukážte, že systém $Ax = b$ má riešenie práve vtedy, ak $\text{hodnosť}(A) = \text{hodnosť}(A')$, kde matica A' je matica, ktorú získame z A pridaním b ako stĺpca navyše.

10. (2.4.12) Nech $Ax = 0$ má netriviálne riešenie. Ukážte, že $A^T y = f$ nebude mať riešenie pre nejaké f . Nájdite príklad takého A a f .

11. (2.4.17) (*Paradox*) Majme pravú inverznú maticu k A , teda $AB = I$. Po prenásobení maticou A^T dostaneme $A^T AB = A^T$, z čoho $B = (A^T A)^{-1} A^T$. Ale potom $BA = I$, t.j. B by mala byť aj ľavá inverzná matica k A . Ktorý krok v tomto “dôkaze” je nekorektný?

12. (2.4.20) Nájdiť maticu s požadovanými vlastnosťami, alebo dokážte, že taká nemôže existovať.

a) Stĺpcový priestor obsahuje $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, riadkový priestor obsahuje $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

b) Stĺpcový priestor má bázu $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, nulový priestor má bázu $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

c) Stĺpcový priestor = \mathbb{R}^4 , riadkový priestor = \mathbb{R}^3 .