Lineárna algebra – Domáca úloha č. 5

Cvičenia v týždni 22. októbra 2007

---

1. (2.6.3) Rozhodnite, či zloženie piatich osových symetrií a ôsmimich rotácí roviny dá rotáciu alebo osovú symetriu. Záleží na poradí v ktorom tieto transforácie robíme?

2. (2.6.5) Priamku prechádzajúcu cez koncové body vektorov u a v môžeme reprezentovať ako koncové body množiny vektorov $P = \{tu + (1-t)v \,|\, t \in \mathbb{R}\}$. Ukážte, že každá lineárna tansformácia zobrazuje priamku na priamku. Tiež ukážte, že stred úsečky tvorenej koncovými bodmi vektorov x a y sa zaobrazí na stred úsečky z Ax do Ay.

3. (2.6.7) Nájdite matice typu 3×3 reprezentujúce transformácie v $\mathbb{R}^3$, ktoré
i) sprojektujú každý vektor do roviny xy,
ii) zobrazia každy vektor symetricky podľa roviny xy,
iii) otočia rovinu xy o uhol γ, nechajúc os z namieste,
iv) otočia rovinu xy, potom rovinu xz a nakoniec rovinu yz, vždy o $90°$,
v) spravia tie isté rotácie ako v iv) len vždy o $180°$.

4. (2.6.9) Nájdite maticu lineárnej transformácie (je to naozaj lineárna transformácia?) z priestoru polynómov $P_3(t)$ do priestoru $P_4(t)$, ktorá každému polynóm priradí jeho $(2+3t)$-násobok.

5. (2.6.13) Predpokladajme, že A je lineárna transformácia roviny xy reprezentovaná maticou M. Ukážte, že ak existuje zobrazenie A^{-1}, potom je aj ono lineárnou transformáciou. Vysvetlite prečo matica M^{-1} reprezentuje A^{-1}.

6. (2.6.16) Priestor všetkých matíc typu 2×2 má štyri bázové "vektory"

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ukážte, že operácia *transpozície* je lineárnou transformáciou na tomto priestore a nájdite príslušnú maticu A v tejto báze. Prečo platí $A^2 = I$?

7. (2.6.19) Vo vektorovom priestore $P_3(t)$ polynómov stupňa 3, t.j. $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$, majme podmnožinu S polynómov spĺňajúcich $\int_0^1 p(t)dt = 0$. Overte, že S je podpriestor a nájdite jeho bázu.

8. (2.6.21) Lineárna transformácia posielajúca vektor tvaru (x_1, x_2, x_3) do (x_2, x_3, x_1) je rotácia. Nájdite jej os a uhol.

9. (3.1.6) V $\mathbb{R}^3$ nájdite všetky vektory, ktoré sú kolmé na vektory $(1, 1, 1)$ a $(1, -1, 0)$. Vytvorte z týchto vektorov bázu $\mathbb{R}^3$, v ktorej budú všetky vektory navzájom ortogonálne a budú mať jednotkovú dĺžku (tvoria tzv. *ortonormálnu* bázu).

10. (3.1.8) Nech V a W sú ortogonálne podpriestory. Ukážte, že iba nulový vektor patrí do oboch z nich, t.j. $V \cap W = \{0\}$.

11. (3.1.11) Tvrdenie o riešiteľnosti systémov lineárnych rovníc sa dá formulovať pomocou tzv. *Fredholmovej alternatívy*: pre každé A a b má práve jeden zo systémov riešenie

$$\text{(i)} \quad Ax = b \qquad\qquad \text{(ii)} \quad A^T y = 0, \quad y^T b \neq 0.$$

Inými slovami, buď b patrí do stĺpcového priestoru $\mathcal{S}(A)$ alebo existuje y v $\mathcal{N}(A^T)$ také, že $y^T b \neq 0$. Ukážte, že rovnice (i) a (ii) nemôžu mať riešenie zároveň.

12. (3.1.14) Ukážte, že $x - y$ je kolmé na $x + y$ práve vtedy, keď $\|x\| = \|y\|$.

13. (3.1.17) Nech V je ortogonálny doplnok podpriestoru W v $\mathbb{R}^n$. Existuje matica, ktorej riadkový priestor je V a nulový priestor je W? Vychádzajúc z bázy priestoru V, ukážte ako by sa skonštruovala taká matica.

14. (3.1.19) Pravda/Nepravda. Zdôvodnite.
a) ak V je ortogonálne k W, potom aj $V^\perp$ je ortogonálne k $W^\perp$,
b) Ak V je ortogonálne k W a W je ortogonálne k Z, potom aj V je ortogonálne k Z.

15. (3.1.20) Nech S je podrpiestor $\mathbb{R}^n$. Vysvetlite, čo znamená rovnosť $(S^\perp)^\perp = S$ a prečo platí.

16. (3.1.22) Nech S je podpriestor $\mathbb{R}^4$ tvorený vektormi spĺňajúcimi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Nájdite bázu priestoru $S^\perp$, t.j. priestoru vektorov kolmých na S.