

1. (3.2.3) Aký násobok vektora  $a = (1, 1, 1)$  je najbližšie k bodu  $b = (2, 4, 4)$ ? Nájďte tiež najbližší bod k bodu  $a$  na priamke prechádzajúcej cez  $b$ .

2. (3.2.5) Aký uhol zvierá vektor  $(1, 1, \dots, 1)$  v  $\mathbb{R}^n$  so súradnicovými osami? Ako vyzerá projekcia na priamku danú týmto vektorom?

3. (3.2.7) Nájďte vektor  $b$ , ktorého dosadením do Cauchy–Schwarzovej nerovnosti dostaneme

$$(a_1 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \dots + a_n^2).$$

Kedy nastáva rovnosť?

4. (3.2.8) Molekula metánu  $\text{CH}_4$  vyzerá tak, že atóm uhlíka je v strede pravidelného štvorstena a štyri atómy vodíka sú v jeho vrcholoch. Ak si za vrcholy vyberieme body  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 1)$  a  $(0, 1, 1)$ , potom dĺžky všetkých hrán medzi nimi budú  $\sqrt{2}$ , teda naozaj ide o pravidelný štvorsten. Aký je kosínus uhla medzi úsečkami spájajúcimi stred  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  s vrcholmi? Aká je veľkosť tohto uhla?

5. (3.2.11) a) Nájďte projekčnú maticu  $P_1$  zobrazujúcu rovinu  $\mathbb{R}^2$  na priamku danú vektorom  $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$  a maticu  $P_2$  zobrazujúcu rovinu na priamku s ňou kolmú.

b) Vypočítajte  $P_1 + P_2$  a  $P_1P_2$ . Vysvetlite.

6. (3.2.13) Ukážte, že stopa matice  $P = aa^T/a^T a$  – t.j. súčet zložiek na jej diagonále – sa vždy rovná 1.

7. (3.2.16) Predpokladajme, že  $P$  je projekčná matica na priamku prechádzajúcu cez  $a$ .

a) prečo je skalárny súčin vektorov  $x$  a  $Py$  rovnaký ako skalárny súčin vektorov  $Px$  a  $y$ ?

b) sú aj uhly medzi nimi rovnaké? Porovnajme ich kosínusy pre  $a = (1, 1, -1)$ ,  $x = (2, 0, 1)$  a  $y = (2, 1, 2)$ .

c) Prečo je skalárny súčin vektorov  $Px$  a  $Py$  opäť rovnaký? Aký je uhol medzi týmito dvoma vektormi?