Lineárna algebra – Domáca úloha č. 7

Cvičenia v týždni 5. novembra 2007

1. (3.3.4) Pre nasledujúce A, x a b rozpíšte chybový člen $E^2 = \|Ax - b\|^2$ ako kvadratickú funkciu dvoch premenných u a v.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Nájdite rovnicu, vyjadrujúcu fakt, že derivácia E^2 vzhľadom na u (resp. v) je nulová. Porovnajte tieto rovnice s $A^T A\overline{x} = A^T b$ a presvedčte sa, že analýza dáva tie isté normálové rovnosti ako geometria. Nájdite riešenie $\overline{x}$ a projekciu $p = A\overline{x}$. Prečo platí $p = b$?

2. (3.3.6) Nájdite projekciu vektora b do stĺpcového priestoru matice A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Rozložte b na zložku p patriacu do stĺpcového priestoru a zložku r kolmú na tento priestor. Do ktorého zo štyroch základných podpriestorov patrí vektor q?

3. (3.3.9) a) Ak $P = P^T P$, ukážte, že P je projekčnou maticou.
b) Na aký podpriestor zobrazuje projekčná matica $P = 0$

4. (3.3.10) Ak sú vektory a_1, a_2 (stĺpce matice A) a b vzájomne ortogonálne, čo výjde pri počítaní $A^T A$ a $A^T b$? Aká je projekcia vektora b na rovinu danú vektormi a_1 a a_2?

5. (3.3.11) Predpokladajme, že P je projekčná matica zobrazujúca na podpriestor S a Q je projekčná matica zobrazujúca na jeho ortogonálny doplnok $S^{\perp}$. Čo budú $P + Q$ a PQ? Ukážte, že matica $P - Q$ je sama sebe inverznou.

6. (3.3.12) Ak V je podpriestor generovaný vektormi $(1, 1, 0, 1)$ a $(0, 0, 1, 0)$ nájdite
a) bázu ortogonálneho doplnku $V^{\perp}$,
b) projekčnú maticu P zobrazujúcu na V,
c) vektor vo V, ktorý je najbližšie k vektoru $b = (0, 1, 0, -1)$ z $V^{\perp}$.

7. (3.3.19) Ak $P_S = A(A^T A)^{-1} A^T$ je projekčná matica zobrazujúca na stĺpcový priestor, ako bude vyzerať projekčná matica P_R zobrazujúca na riadkový priestor? (Nie je to P_S^T!)

8. (3.3.20) Ak P_R je projekčná matica na riadkový priestor matice A, ako potom vyzerá projekčná matica P_N zobrazujúca na nulový priestor? (Tieto dva priestory sú navzájom ortogonálne)

9. (3.3.26) Mladý odborný asistent bol natiahnutý na škripci na dĺžky $L = 175, 180$ a 185 centimetrov pri aplikovaní sily zodpovedajúcej tiaži $F = 1, 2$ a 4 tony. Ak predpokladáme, že platí Hookov zákon $L = a + bF$, nájdite jeho pokojovú dĺžku a metódou najmenších štvorcov.

10. (3.4.2) Nájdite projekcie vektora $b = (0, 3, 0)$ na priamky dané navzájom ortogonálnymi vektormi $a_1 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ a $a_2 = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Nájdite projekciu vektora b na rovinu generovanú a_1 a a_2.

11. (3.4.6) Nájdite tretí stĺpec matice

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} & \end{bmatrix}$$

tak, aby bola ortogonálna (t.j. $Q^T Q = I$). Musí to byť vektor jednotkovej dĺžky, ortogonálny na zvyšné dva stĺpce – koľko voľnosti vlastne zostáva? Ukážte, že potom budú aj riadky matice Q ortonormálne.

12. Ukážte, že ortogonálna matica, ktorá je zároveň hornou trojuholníkovou musí byť diagonálna.