

**1.** (3.4.4) Nech  $Q_1$  a  $Q_2$  sú ortogonálne matice (t.j. splňajú  $Q^T Q = I$ ). Ukážte, že aj súčin  $Q_1 Q_2$  je ortogonálna matica. Ak matica  $Q_1$  reprezentuje otočenie (v  $\mathbb{R}^2$ ) o uhol  $\theta$  a matica  $Q_2$  otočenie o uhol  $\phi$ , čo bude  $Q_1 Q_2$ ? Nájdite súčtové vzorce pre  $\sin(\theta + \phi)$  a  $\cos(\theta + \phi)$  v súčine  $Q_1 Q_2$ .

**2.** (3.4.5) Nech  $u$  je jednotkový vektor. Ukážte, že  $Q = I - 2u^T u$  je ortogonálna matica. Táto matica reprezentuje súmernosť podľa nadroviny  $\rho = \{x \mid a^T x = 0\}$  a nazýva sa Householderova transformácia. Skúste si nakresliť obrázok, projekciu na priamku danú vektorom  $u$ , atď. Vypočítajte  $Q$  pre  $u^T = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ .

**3.** (3.4.9) Ak sú vektory  $q_1, q_2$  a  $q_3$  ortonormálne, ktorá lineárna kombinácia  $q_1$  a  $q_2$  je najbližšie ku  $q_3$ ?

**4.** (3.4.13) Použite Gram-Schmidtov proces na vektory

$$a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a vyjadrite výsledok v tvare  $A = QR$ .

**5.** (3.4.18) Ak  $A = QR$  nájdite jednoduchý vzorec pre projekčnú maticu  $P$  zobrazujúcu do stĺpcového priestoru  $A$ .

**6.** (3.4.21) Aká je najbližšia funkcia tvaru  $a \cos x + b \sin x$  k funkcii  $f = \sin 2x$  (berúc do úvahy interval  $(-\pi, \pi)$ )? Aká je najbližšia lineárna funkcia  $c + dx$ ?

**7.** (3.4.24) Nájdite nasledujúce Legendrove polynómy – t.j. polynóm stupňa 3 ortogonálny na 1,  $x$  a  $x^2 - \frac{1}{3}$ , podobne pre polynóm stupňa 4 – na intervale  $(-1, 1)$ .

**8.** (3.4.27) Nájdite ortonormálnu bázu pre podpriestor generovaný vektormi  $a_1 = (1, -1, 0, 0)$ ,  $a_2 = (0, 1, -1, 0)$  a  $a_3 = (0, 0, 1, -1)$ .

**9.** (3.6.1) Nech  $S$  a  $T$  sú podpriestory  $\mathbb{R}^{13}$  s dimenziami  $\dim S = 7$  a  $\dim T = 8$ .

- Aká je najväčšia možná dimenzia  $S \cap T$ ?
- Aká je najmenšia možná dimenzia  $S \cap T$ ?
- Aká je najmenšia možná dimenzia  $S + T$ ?
- Aká je najväčšia možná dimenzia  $S + T$ ?

**10.** Nájdite príklad podpriestorov  $V$  a  $W$  v  $\mathbb{R}^3$  tak, aby  $V \cap W$  obsahovalo iba nulový vektor ale  $V$  nebol ortogonálny na  $W$ .

**11.** (3.R.19) Ukážte, že ak vektory  $v_1, \dots, v_n$  tvoria ortonormálnu bázu v  $\mathbb{R}^n$ , potom  $v_1 v_1^T + \dots + v_n v_n^T = I$ .

**12.** (3.R.20) *Pravda/Nepravda:* Ak vektory  $x$  a  $y$  sú ortogonálne a  $P$  je projekcia, potom  $Px$  a  $Py$  sú ortogonálne. Zdôvodnite.